

Aula 16

*TJ-SP (Escrevente Judiciário) Raciocínio
Lógico e Matemática - 2024 (Pós-Edital)*

Autor:
**Equipe Exatas Estratégia
Concursos**

25 de Junho de 2024



Índice

1) Noções Elementares	3
2) Circunferência	17
3) Triângulos	30
4) Quadriláteros	67
5) Polígonos	74
6) Inscrição e Circunscrição	81
7) Questões Comentadas - Introdução - Vunesp	92
8) Questões Comentadas - Circunferências - Vunesp	100
9) Questões Comentadas - Triângulos - Vunesp	108
10) Questões Comentadas - Quadriláteros - Vunesp	123
11) Questões Comentadas - Polígonos - Vunesp	145
12) Lista de Questões - Introdução - Vunesp	157
13) Lista de Questões - Circunferências - Vunesp	160
14) Lista de Questões - Triângulos - Vunesp	163
15) Lista de Questões - Quadriláteros - Vunesp	169
16) Lista de Questões - Polígonos - Vunesp	176



GEOMETRIA PLANA

Considerações Iniciais

Opa!! Bem-vindos!! O tema da aula de hoje será Geometria Plana. Trata-se de um assunto muito bacana e prático. Porém, adianto que precisaremos decorar algumas fórmulas, dando especial atenção às usadas para calcular a área de um determinado polígono.

No mais, gostaria de pedir que não negligenciem os exercícios, pois não há maneira melhor de memorizar as fórmulas do que por meio da prática intensa!! Sem mais conversa, vamos começar!

Uma ótima aula a todos e um forte abraço,
Prof. Francisco Rebouças.

Para **tirar dúvidas**, não deixe de utilizar **o nosso fórum**. Lá, estaremos sempre à disposição para ajudá-lo. Se preferir, você também **pode entrar em contato diretamente comigo** por meio do seguinte canal:

E-mail - Prof. Francisco Rebouças:
prof.franciscoreboucas@gmail.com

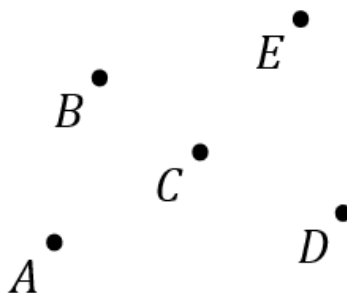
"Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar onde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz." (Bill Gates)



Introdução

Ponto

O ponto, a reta e o plano são noções bem **primitivas** de geometria. Tente definir um ponto. Você vai perceber que existe uma certa dificuldade nisso (rsrs). Apesar de não ter uma definição "pra valer", sabemos algumas de suas propriedades, de forma que conseguimos identificá-lo e caracterizá-lo.

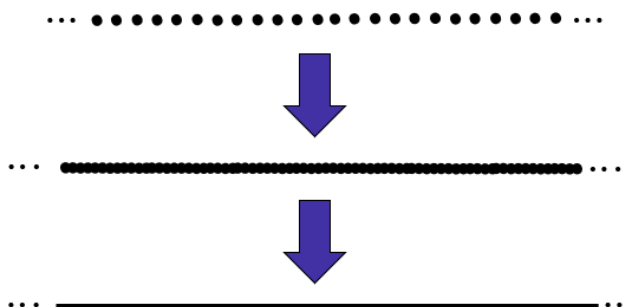


A figura acima mostra vários exemplos de pontos. Você pode notar que chamamos cada um deles de uma **letra maiúscula**. É a notação mais comum. Uma outra característica do ponto é que ele **não possui dimensão**. Dizemos que é um elemento adimensional.

Esse fato permite usarmos o ponto para identificar uma localização com bastante acuracidade. Por fim, vale a pena você anotar aí que não podemos dividir um ponto. Isso mesmo, você não pode "quebrar" um ponto em dois pontos.

Reta

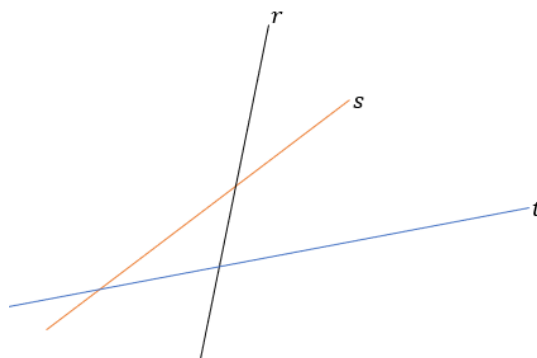
Por sua vez, **a reta vai ser formada pela união de infinitos pontos**.



Na imagem acima, tentei representar vários pontos se aglomerando até formarem uma reta (rsrs). Vamos lá! *Quais são as características de uma reta?* Primeiro: **ela é unidimensional**. Enquanto um ponto não possui dimensão (é adimensional), a reta agora é unidimensional.

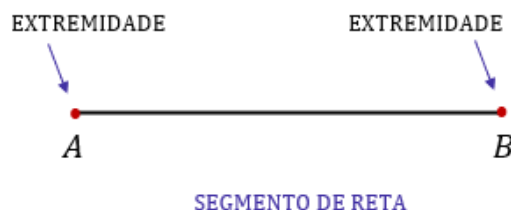


Segundo: **ela é infinita para ambos os lados**! Ou seja, ela segue indefinidamente para qualquer um dos lados (apesar de não ser obrigatório, usamos reticências nas "extremidades" da reta para expressar esse fato).

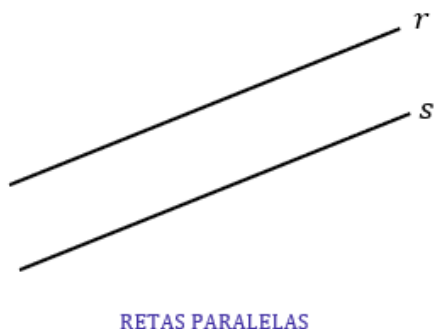


A imagem acima mostra a notação que usamos para as retas: **letras minúsculas**. Enquanto nos pontos usamos letras maiúsculas, nas retas são letras minúsculas! Vale ressaltar que o alfabeto que estamos utilizando de referência aqui é o latino (Aa, Bb, Cc, ..., Zz).

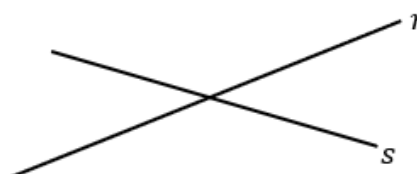
Agora, vou contar para vocês uma novidade. Em algumas situações, a reta terá extremidade(s). Logo, ela não se prolongará até ao infinito nos dois lados. Quando ela tiver **uma extremidade**, a chamaremos de **semirreta**. Por sua vez, quando ela tiver as **duas extremidades**, será apenas um **segmento de reta**.



Normalmente, representamos o segmento de reta com extremidades A e B por $\overline{AB}$. Além desse detalhe, existe mais uma classificação que leva em conta se duas ou mais retas estão se encontrando. *Como assim?!*



RETAS PARALELAS



RETAS CONCORRENTES

As **retas paralelas não se encontram**, enquanto as **retas concorrentes sim**. Essas últimas possuem **um único ponto em comum**. Duas retas que se encontram em mais de um ponto necessariamente vão se encontrar em todos os demais e serão chamadas retas coincidentes!

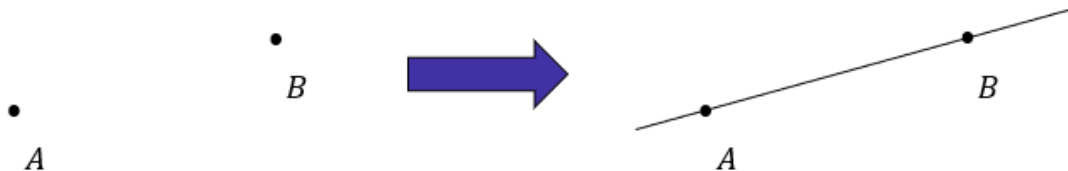
 $r \equiv s$

RETAS COINCIDENTES

É como se uma reta estivesse em cima da outra!!

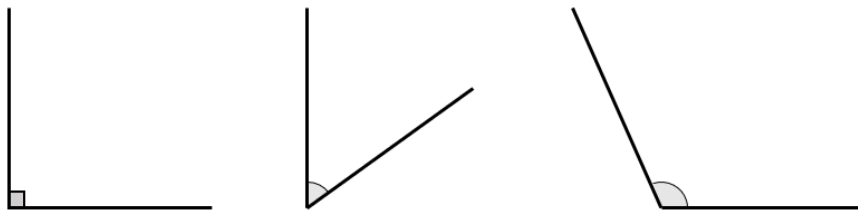
Para finalizar essa parte introdutória de retas, anote aí a seguinte propriedade:

- Sempre conseguiremos traçar uma reta por quaisquer dois pontos. Essa reta será única.

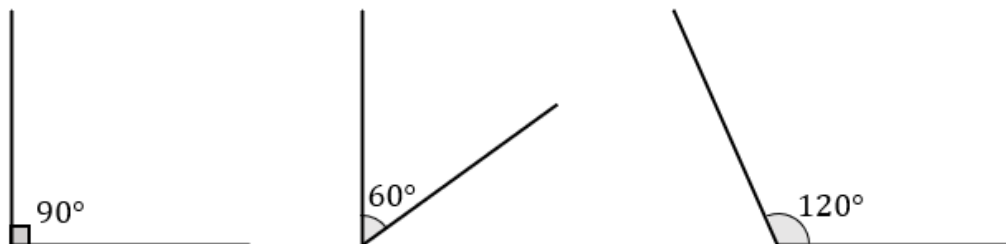


Ângulos

Um ângulo é formado pelo **encontro de duas semirretas**. Esse encontro pode se dar de várias formas. Veja.



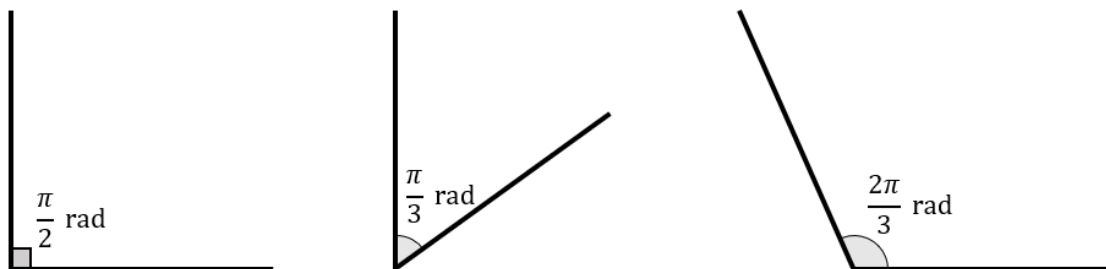
Perceba que dependendo de como arranjamos as semirretas, vamos ter aberturas diferentes. Nós podemos **quantificar essa abertura e expressar o resultado em graus (°) ou radianos (rad)**.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS (°)



Agora olhe os mesmos ângulos, mas expressados em radianos.



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM RADIANOS (rad)

São duas maneiras bem diferentes de expressarmos os ângulos, concorda? Muitos alunos possuem facilidade quando estão trabalhando com graus ($^{\circ}$), mas quando aparece um ângulo em radianos (rad), já ficam assustados. Moçada, apenas uma regra de três simples separa um ângulo em radiano de um ângulo em grau (ou vice-versa). Para isso, lembre-se sempre do seguinte:

TOME NOTA!



180° equivalem a π rad.

Sabendo disso, é só usar uma regra de três para converter um em outro. Vamos fazer alguns exemplos.

EXEMPLIFICANDO



1) Converter 60° em radianos.

Você pensa assim: se 180° equivalem a π rad, então 60° equivalem a x . Com isso, podemos esquematizar:

$$\begin{array}{ccc} 180^{\circ} & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ 60^{\circ} & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Multiplicando cruzado.



$$180x = 60\pi \rightarrow x = \frac{60\pi}{180} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}}$$

Logo, podemos dizer que 60° equivalem a $\pi/3$ rad.

2) Converter $\frac{5\pi}{6}$ rad em graus.

Pensamento muito semelhante, moçada! Se 180° equivalem a π rad, então x equivalem a $\frac{5\pi}{6}$ rad.

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ x & \longleftrightarrow & \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = 30 \cdot 5 \rightarrow \boxed{x = 150^\circ}$$

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150° .

A tabela abaixo mostra os ângulos (em graus) mais frequentes em provas, bem como seu valor em radianos.



Principais Ângulos	
Em Graus	Em Radianos
0°	0 rad
30°	$\frac{\pi}{6}$ rad
45°	$\frac{\pi}{4}$ rad
60°	$\frac{\pi}{3}$ rad
90°	$\frac{\pi}{2}$ rad
180°	π rad



270°	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
360°	$2\pi \text{ rad}$



(CBM-RO/2022) O ângulo de 1 radiano equivale, em graus, a um ângulo

- A) menor que 15° .
- B) maior ou igual a 60° .
- C) maior ou igual a 15° e menor que 30° .
- D) maior ou igual a 30° e menor que 45° .
- E) maior ou igual a 45° e menor que 60°

Comentários:

Para treinar, moçada! Ora, se 180° equivalem a $\pi \text{ rad}$, então x graus equivalem a 1 rad.

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longleftrightarrow & \pi \text{ rad} \\ x & \longleftrightarrow & 1 \text{ rad} \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

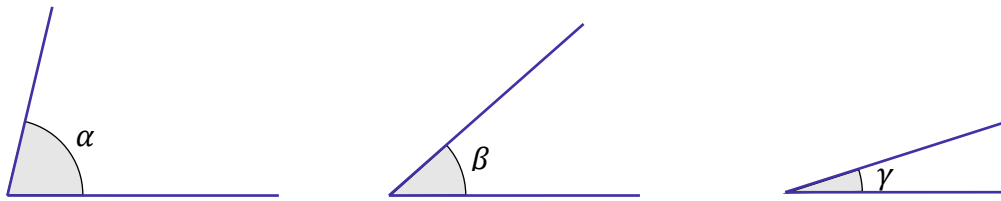
$$x \cdot \pi = 180 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{180}{\pi} \quad \rightarrow \quad \boxed{x \cong 57,29^\circ}$$

Gabarito: LETRA E.

Agora que sabemos o que é um ângulo e suas unidades, vamos entrar nas nomenclaturas e classificações.

- **Ângulo Raso:** É o ângulo de 180° ($\pi \text{ rad}$).
- **Ângulo Reto:** É o ângulo de 90° ($\pi/2 \text{ rad}$)
- **Ângulo Agudo:** Todo ângulo maior que 0° e menor que 90° .





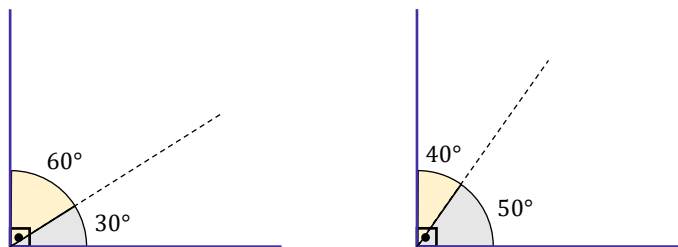
α, β e γ são ângulos agudos.

- **Ângulo Obtuso:** Todo ângulo maior que 90° e menor que 180° .



δ e θ são ângulos obtusos.

- **Ângulos Complementares:** Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 90° .



Por exemplo, 60° e 30° são ângulos complementares, já que $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Da mesma forma, 40° e 50° também são. Beleza?!!

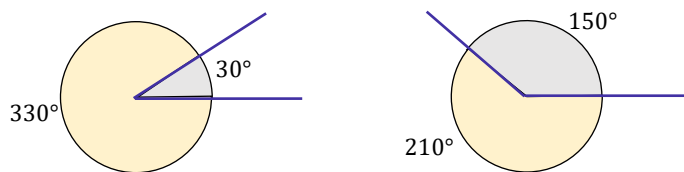
- **Ângulos Suplementares:** Dois ângulos são chamados de complementares quando sua soma é igual a 180° .



Observe que 150° e 30° são ângulos suplementares, uma vez que sua soma é igual a 180° . Da mesma forma, 75° e 105° também são.

- **Ângulos Replementares:** Dois ângulos são chamados de replementares quando sua soma é 360° .





- 330° e 30° são ângulos replementares pois $330^\circ + 30^\circ = 360^\circ$.
- 210° e 150° também são ângulos replementares, já que $210^\circ + 150^\circ = 360^\circ$.



(PREF. AMERICANA/2023) Ângulos complementares, são aqueles que:

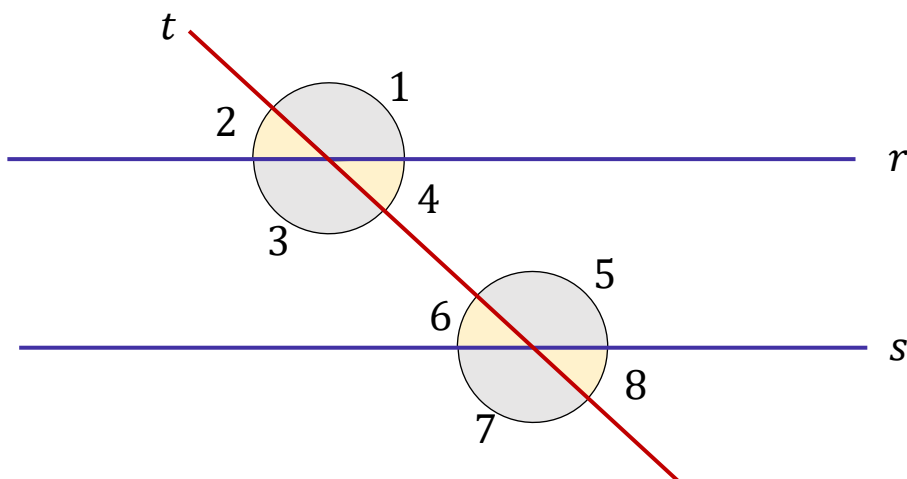
- A) possuem medidas iguais à 120° .
- B) separados medem 180° cada um.
- C) juntos medem 90° .
- D) separados medem 90° cada um.
- E) juntos medem 180° .

Comentários:

Pessoal, **dois ângulos são complementares quando sua soma é igual a 180°** . Em outras palavras, quando juntos medem 180° . Portanto, nosso gabarito é a alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

Para finalizar essa parte de ângulos, vamos conhecer mais alguns nomes que podem aparecer na sua prova. Considere a seguinte situação:

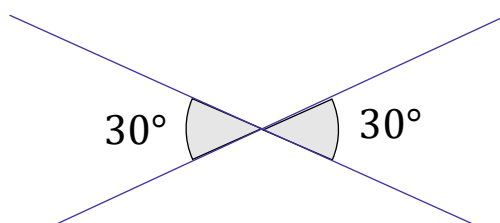


r e s são retas paralelas, enquanto t é uma transversal. Observe que quando a transversal corta as duas retas paralelas, vários ângulos são formados. Esses 8 novos ângulos ganham nomes. Vamos lá!

- Ângulos **opostos pelo vértice**: (1,3), (2,4), (5,7) e (6,8);
- Ângulos **alternos internos**: (4,6) e (3,5);
- Ângulos **alternos externos**: (2,8) e (1,7);
- Ângulos **colaterais internos**: (3,6) e (4,5);
- Ângulos **colaterais externos**: (1,8) e (2,7).

Professor, é muito nome! É muita coisa! Vou endoidar!

Calma, aluno! Se eu tivesse que escolher o mais importante para te falar, escolheria o oposto pelo vértice. Saiba que se dois ângulos são opostos pelo vértice. A consequência de dois ângulos serem opostos pelo vértice é que eles possuirão a mesma medida!



Vale a pena ter em mente que ângulos alternos internos/externos são congruentes (iguais). Por exemplo, voltando para a figura da página anterior,

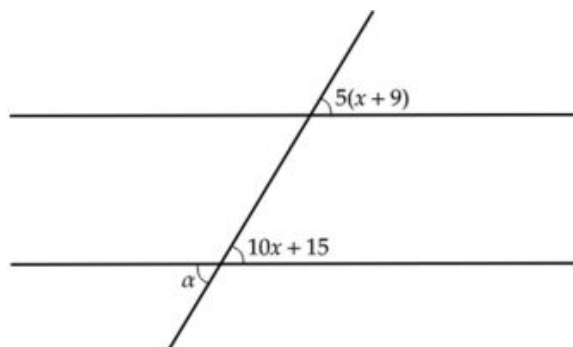
- Como 4 e 6 são ângulos alternos internos, então eles possuem a mesma medida (são congruentes).
 - Como 1 e 7 são ângulos alternos externos, então eles também possuem a mesma medida (são congruentes).
- Dito tudo isso, agora vamos exercitar um pouco!

HORA DE PRATICAR!



(PREF. ITAPURANGA/2023) Na figura são apresentadas duas retas paralelas interceptadas por uma única transversal.





Qual o valor do ângulo α ?

- A) 75° .
- B) 65° .
- C) 60° .
- D) 55° .

Comentários:

Observe que a reta transversal corta as paralelas **sob um mesmo ângulo**. Dessa forma, podemos escrever:

$$5(x + 9) = 10x + 15$$

Resolvendo para "x":

$$5x + 45 = 10x + 15$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Como " $10x + 15$ " é **oposto pelo vértice** à α , temos:

$$\alpha = 10x + 15$$

Substituindo $x = 6$:

$$\alpha = 10 \cdot 6 + 15$$

$$\alpha = 60 + 15$$

$$\boxed{\alpha = 75^\circ}$$

Gabarito: LETRA A.



Graus, minutos e segundos

Para finalizar esse tópico inicial, vamos apresentar a relação entre grau, minutos e segundos.

Professor, o que tempo tem a ver com ângulos?

Galera, é importante não misturarmos as coisas. Muito cuidado para não confundir esse ponto da matéria! Aqui, "minutos" e "segundos" são unidades de medida angular (assim como o grau)! Não tem nada a ver com tempo. Dizemos que 1 grau tem 60 minutos e que 1 minuto tem 60 segundos.

TOME NOTA!



$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

Guarde bem isso pois é fundamental na hora das conversões!

Note que representamos o minuto com a plica simples (') e o segundo como a plica dupla ("). Na hora da questão, atente-se a esses símbolos para não confundir minuto com segundo (ou vice-versa). Agora, para entender melhor como esse conhecimento pode ser cobrado em prova, vamos fazer uma questão!

EXEMPLIFICANDO



(CM BAURU/2022) Dois ângulos são chamados de complementares quando, juntos, resultam em 90° . Sabendo que A e B são ângulos complementares e $A = 72^{\circ}34'27''$, qual é a medida do ângulo B?

- A) $17^{\circ}26'33''$
- B) $18^{\circ}26'33''$
- C) $17^{\circ}25'33''$
- D) $18^{\circ}25'33''$
- E) $27^{\circ}25'33''$

Comentários:



Observe que o ângulo A está expresso **em graus, minutos e segundos**. É possível encontrarmos B trabalhando com todas essas unidades ao mesmo tempo. Observe!

Como A e B são ângulos complementares, podemos escrever:

$$A + B = 90^\circ$$

Usando $A = 72^\circ 34' 27''$:

$$72^\circ 34' 27'' + B = 90^\circ$$

Note que 90° está expresso apenas em graus, enquanto A está expresso também em minutos e segundos. Sendo assim, **devemos expressar 90° em todas essas unidades também**. Observe as diferentes formas:

$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ 59' 60''$$

Para entender essas equivalências é superimportante você lembrar que:

$$1^\circ = 60' \quad \text{e} \quad 1' = 60''$$

Quando escrevemos $89^\circ 60'$, queremos dizer:

$$89^\circ + 60'$$

Ora, $60'$ é igual a 1° .

$$90^\circ = 89^\circ 60' = 89^\circ + 60' = 89^\circ + 1^\circ = 90^\circ$$

Percebeu a volta que demos? Tudo isso para mostrar que temos formas alternativas de representar um mesmo ângulo. Como estamos interessados também nos segundos, usaremos:

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

Ora, observe o motivo:

$$90^\circ = 89^\circ 59' 60'' = 89^\circ + 59' + \underbrace{60''}_{1'} = 89^\circ + 59' + 1' = 89^\circ + \underbrace{60'}_{1^\circ} = 89^\circ + 1^\circ = 90^\circ$$

Dito isso, vamos reescrever nossa equação.

$$72^\circ 34' 27'' + B = 89^\circ 59' 60''$$



$$B = 89^{\circ}59'60'' - 72^{\circ}34'27''$$

Para fazer essa subtração, vamos organizá-la naquela forma tradicional:

$$\begin{array}{r} 89^{\circ}59'60'' \\ - 72^{\circ}34'27'' \\ \hline 17^{\circ}25'33'' \end{array}$$

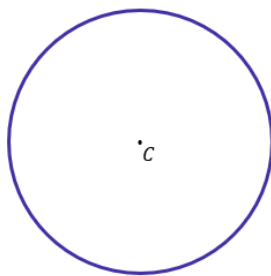
Pessoal, o segredo aqui é não misturar. Faça a subtração em cada um dos grupos: segundos, depois os minutos e, por fim, os graus.

Gabarito: LETRA C.



Circunferência

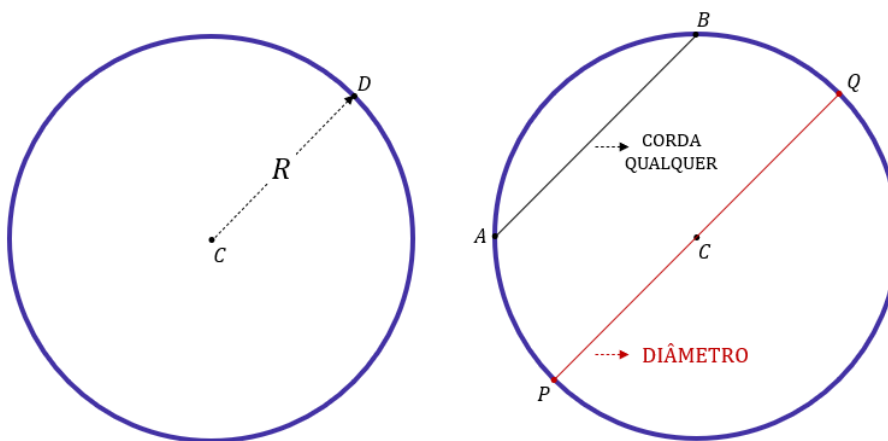
A primeira figura geométrica que estudaremos na aula de hoje será a circunferência. Particularmente, acho ela bem interessante, já que é uma **forma bem corriqueira**. Lembre-se de uma pizza, de um pneu, de uma moeda... todos eles possuem um formato circular (circunferencial). Com um pouco mais de rigor, nós definimos uma circunferência como sendo **o conjunto dos pontos equidistantes de um centro (C)**.



Raio, Diâmetro e Cordas

Quando estamos falando do raio (R) de uma circunferência, estamos falando da **distância entre seus pontos e o centro**. Por sua vez, corda é o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de uma circunferência.

Acontece que **quando essa corda passa pelo centro da circunferência, nós a chamamos de diâmetro**. Para um melhor entendimento, vamos dar uma olhada nas figuras abaixo!

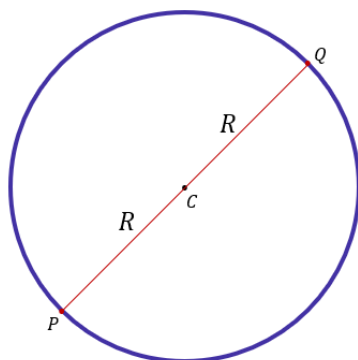


A figura de esquerda ilustra **o raio**. É exatamente a distância entre o centro e um ponto da circunferência. Na situação retratada, chamamos esse ponto de D. Já na circunferência da direita, quero mostrar pra você a diferença entre o diâmetro e uma corda qualquer.

Pessoal, para ser diâmetro, **o segmento de reta precisa passar pelo centro da circunferência**. Caso não passe (como o segmento AB), teremos uma corda. É verdade que o diâmetro não deixa de ser uma corda, mas é uma "corda especial", pois ela **é a corda de maior comprimento**!



Se olharmos com atenção para a figura, vemos que o comprimento do diâmetro (ou simplesmente diâmetro a partir de agora) vale exatamente **duas vezes o raio**. Por esse motivo, escrevemos que:



$$D = 2R$$



Raio: distância do centro até um ponto da circunferência.

Corda: segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: corda que passa pelo centro da circunferência. Mede o dobro do raio ($2R$).

(PREF. PACUJÁ/2019) Qual o diâmetro de uma circunferência cuja soma do raio com o diâmetro é 37,5 cm?

- A) 24 cm.
- B) 27 cm.
- C) 25 cm.
- D) 26 cm.
- E) 28 cm.

Comentários:

De acordo com o enunciado, temos que:

$$R + D = 37,5$$

Como sabemos que o $D = 2R$, ou, $R = D/2$, podemos substituir:

$$\frac{D}{2} + D = 37,5$$



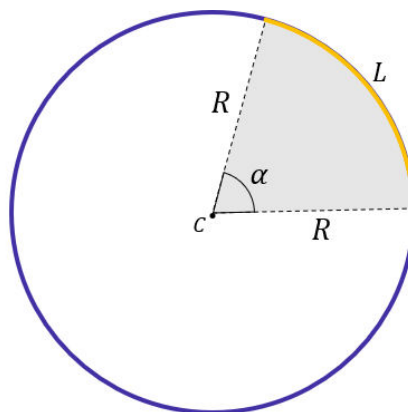
$$3D = 75$$

$$D = 25$$

Gabarito: LETRA C

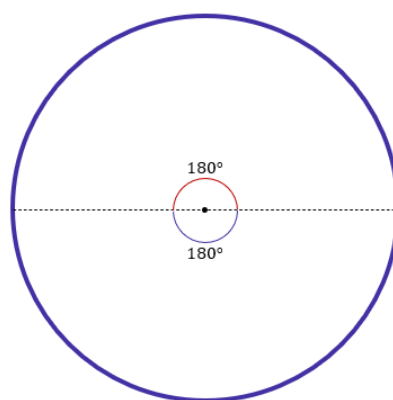
Setores

Um setor de circunferência corresponde à famosa **fatia de pizza**! Observe a figura abaixo.



Todo setor possui um ângulo central (α). Além disso, a borda da pizza (destacada de amarelo) possui um comprimento L . É o que chamamos de comprimento do arco. **Esse comprimento L depende tanto do ângulo central (α) como do raio (R).**

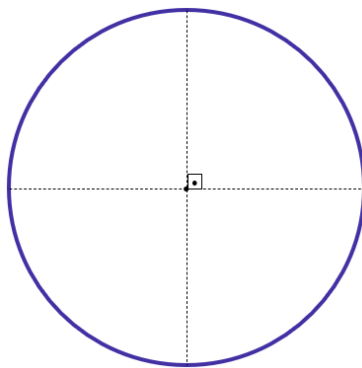
Aprenderemos a calculá-lo em breve. Antes disso, vamos aprender a calcular α . Para isso, imagine que você recebeu uma pizza enorme e vai dividi-la com um colega. Você corta ao meio:



Veja que cada setor ficou com um ângulo central de 180° .

Situação análoga ocorreria se dividíssemos a pizza em 4 fatias idênticas.





Quando temos quatro setores idênticos, o ângulo central de cada um deles é igual a **um quarto do ângulo total da circunferência**, isto é,

$$\alpha = \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

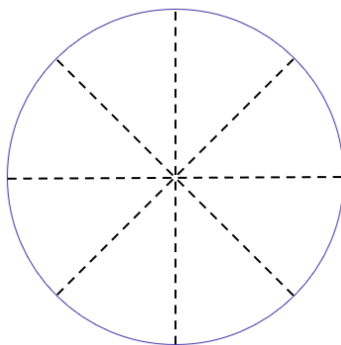


(CM VINHEDO/2020) Uma pizza de 8 pedaços faz cada fatia ter 45° de ângulo. Se quiser dividir em 9 pedaços, qual deve ser o ângulo da fatia?

- A) 40°
- B) 42°
- C) 50°
- D) 60°
- E) 45°

Comentários:

Pessoal, a **pizza tem o formato de uma circunferência (normalmente, rsrs)**. Quando dividimos ela em 8 pedaços, ficamos com uma situação parecida com a mostrada a seguir:



Cada fatia corresponde a um setor de circunferência cujo ângulo é a oitava parte de 360° . Afinal, aprendemos que **uma circunferência tem 360°** (ou 2π rad).

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Se dividirmos a pizza em 9 pedaços, podemos encontrar o ângulo central de cada setor dividindo **360° por 9**.

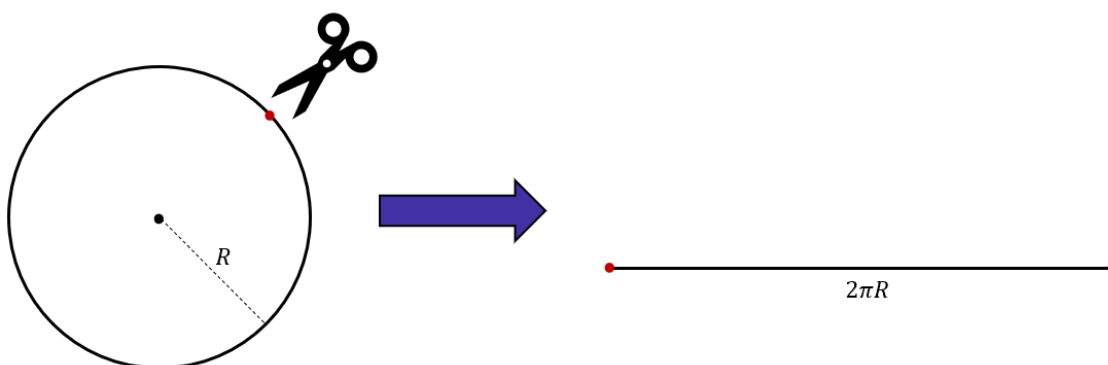
$$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Gabarito: LETRA A.

Beleza, tudo bem até aqui né, pessoal? Vimos um pouco da definição de circunferência, de raio, de corda, de diâmetro e de setores. Espero que tudo esteja fazendo sentido, sempre voltaremos a falar deles! A medida que formos introduzindo novos conceitos, vamos ganhando mais maturidade e voltaremos a comentar aspectos adicionais desses elementos! Agora, continuando!

Comprimento de uma Circunferência

Lembra que no tópico passado eu falei sobre comprimento do arco? Que era tipo a medida da borda da fatia da pizza. Aqui, no comprimento da circunferência, estamos nos referindo **a medida da borda de toda a pizza** e não apenas da fatia! *Eita, tanta pizza que já tá dando fome! (rsrs)*. Existe uma figura que eu gosto bastante para explicar o comprimento da circunferência, veja:



Ficou um pouco melhor de visualizar? Para tentar explicar de uma outra forma, imagine uma formiga no ponto vermelho, onde a tesoura vai cortar! **A distância que ela andaria para completar a volta** (andando apenas sobre a linha preta) é exatamente igual ao comprimento da circunferência (C). Esse valor é dado por uma fórmula bem conhecida que já adiantei um pouco na imagem acima, anota aí!

$$C = 2\pi R \quad \text{ou} \quad C = \pi D$$





(PREF. NOVA HAMBURGO/2024) A solução da equação de primeiro grau $5x - 21 = 2x + 15$ representa o diâmetro de uma circunferência. Qual é o comprimento dessa circunferência? Utilize $\pi = 3$.

- A) 12.
- B) 36.
- C) 72.
- D) 108.
- E) 432.

Comentários:

Inicialmente, temos que **resolver a equação de 1º grau**. Para isso, precisamos isolar o x em um dos lados:

$$5x - 21 = 2x + 15$$

$$5x - 2x = 15 + 21$$

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

Logo, o diâmetro da circunferência é **12 unidades de medida**. Para calcular o comprimento da circunferência, basta **multiplicar o diâmetro pelo valor de π** , que é dado como 3. Portanto, temos:

$$C = \pi D$$

$$C = 3 \cdot 12$$

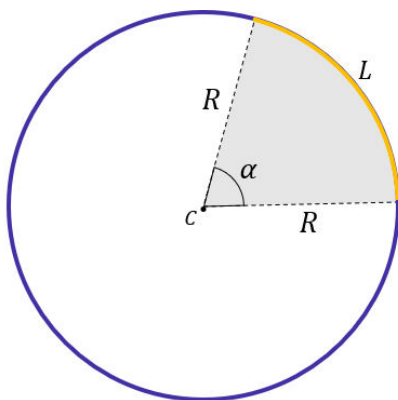
$$\boxed{C = 36}$$

Logo, a alternativa correta é a letra B.

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos calcular o comprimento de uma circunferência, podemos fazer uma regra de três simples para achar o comprimento do arco. Voltemos para a figura do setor.





Ora, se quando temos uma circunferência inteira (que possui 360°), o comprimento dela é $2\pi R$, então um arco de ângulo central α tem comprimento L .

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \longleftrightarrow & 2\pi R \\ \alpha & \longleftrightarrow & L \end{array}$$

Multiplicando cruzado.

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)$$

Essa é a expressão para quando **estamos usando o ângulo central em graus!!** Caso você esteja usando α em radianos, devemos usar 2π na regra de três ao invés de 360° .

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longleftrightarrow & 2\pi R \\ \alpha & \longleftrightarrow & L \end{array}$$

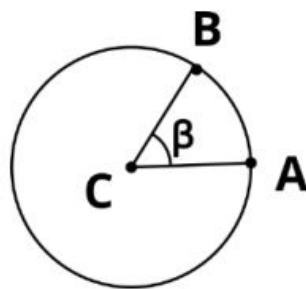
Multiplicando cruzado.

$$L = \alpha \cdot R$$

Na minha opinião, a fórmula desse jeito é bem mais interessante. Veja que o comprimento do arco L é o **produto do ângulo central (em radianos) pelo raio**. Quando o ângulo central é igual 2π , note que a expressão vira a fórmula do comprimento da circunferência. *Agora, vamos praticá-la?!*



(PREF. ITAPECERICA/2023) Considere a circunferência abaixo, cujo centro é o ponto C.



Se o menor arco de circunferência compreendido entre os pontos A e B vale 10 cm e o ângulo β vale 30° , indique o raio da circunferência: Considere $\pi = 3$.

- A) 120 cm.
- B) 40 cm.
- C) 30 cm.
- D) 20 cm.
- E) 12 cm.

Comentários:

Pessoal, veja que ele deu **o ângulo em graus (30°)** e **o comprimento do arco (10)**. A pergunta que ele faz é: qual é o raio? Ora, se ele deu o ângulo em graus, podemos usar a fórmula:

$$L = 2\pi R \cdot \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)$$

Do enunciado: $\alpha = 30^\circ$ e $L = 10$ cm. Vamos encontrar R.

$$10 = 2 \cdot 3 \cdot R \cdot \left(\frac{30^\circ}{360^\circ}\right) \rightarrow 5 = 3R \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \rightarrow \boxed{R = 20 \text{ cm}}$$

Gabarito: LETRA D.

Área de uma Circunferência

Quando calculamos a área de uma figura plana, estamos tentando **quantificar o tamanho da região delimitada por ela**. Pode ser um conceito meio abstrato, mas sempre usamos no dia-a-dia. Se conhecemos o raio da circunferência, podemos calcular sua área.

$$A = \pi R^2$$



Sugiro muito que guardem essa fórmula no coração. Além disso, a dica suprema é: **faça muitos exercícios** que envolvam cálculos de áreas de circunferência. Dessa forma, tenho certeza que ela entrará na "massa do sangue".



(CIGA-SC/2023) A prefeitura de uma cidade do interior está projetando uma praça circular com brinquedos para as crianças, além de bancos e árvores. A praça terá um diâmetro de 700 metros, logo o valor da área da praça, em quilômetros quadrados, será aproximadamente de: Utilize $\pi = 3,14$.

- A) 3,850 km².
- B) 0,385 km².
- C) 38,465 km².
- D) 1,539 km².
- E) 15,386 km².

Comentários:

Note que ele deu o **diâmetro da circunferência** (700 m). Lembre-se que **o raio é metade do diâmetro**. Logo,

$$R = 350 \text{ m} = 0,35 \text{ km}$$

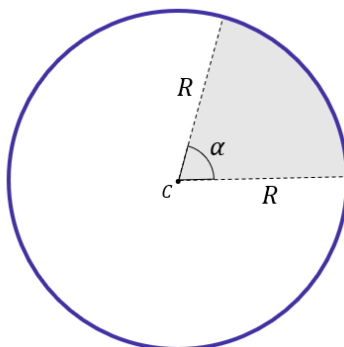
Sendo assim, a **área da praça** será:

$$A = \pi R^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 0,35^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 0,1225 \rightarrow \boxed{A = 0,38465 \text{ km}^2}$$

O resultado mais próximo do resultado encontrado está na alternativa C.

Gabarito: LETRA B.

Agora que sabemos calcular a área de uma circunferência, podemos voltar e calcular a área de um setor (a famosa fatia da pizza)!



Imagine que queremos **calcular a área do setor** destacado acima. *Como faríamos?* Tem duas maneiras, galera. Ou decoramos a fórmula, ou usamos uma **regra de três simples** para deduzi-la. Para uma circunferência completa (que possui **360° ou 2π rad**), a área é πR^2 . Assim,

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longleftrightarrow & \pi R^2 \\ \alpha & \longleftrightarrow & A_{\text{setor}} \end{array}$$

Multiplicando cruzado, chegamos a:

$$A_{\text{setor}} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Uma observação muito importante: para usar a fórmula acima, **α deve estar em radianos**! Caso prefira, podemos fazer a regra de três utilizando 360°.

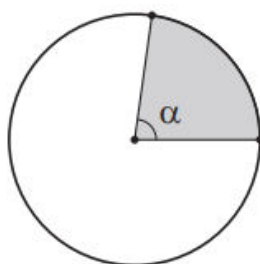
$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \longleftrightarrow & \pi R^2 \\ \alpha & \longleftrightarrow & A_{\text{setor}} \end{array}$$

Assim,

$$A_{\text{setor}} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \right) \pi R^2$$

Já a fórmula acima é para quando **α estiver em graus**. Note que se você lembra da fórmula da área da circunferência, para obter a fórmula da área do setor, basta utilizarmos uma regra de três. Você não precisa "ocupar o HD" com mais uma coisa! Fique frio!

(UMEMAT/2024) Na figura, representa-se um setor circular cujo ângulo central é α .



A área desse setor circular corresponderá a 2/3 da área do círculo quando a medir



- A) 120°
- B) 225°
- C) 230°
- D) 240°
- E) 270°

Comentários:

Para calcular o valor de α , vamos utilizar a seguinte fórmula:

$$A_{\text{setor}} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right) \pi R^2$$

Como a área do setor corresponde a 2/3 da área do círculo, podemos escrever:

$$A_{\text{setor}} = \frac{2}{3} \pi R^2$$

Igualando as duas expressões:

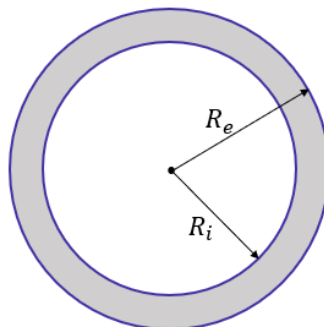
$$\frac{2}{3} \cancel{\pi R^2} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right) \cancel{\pi R^2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

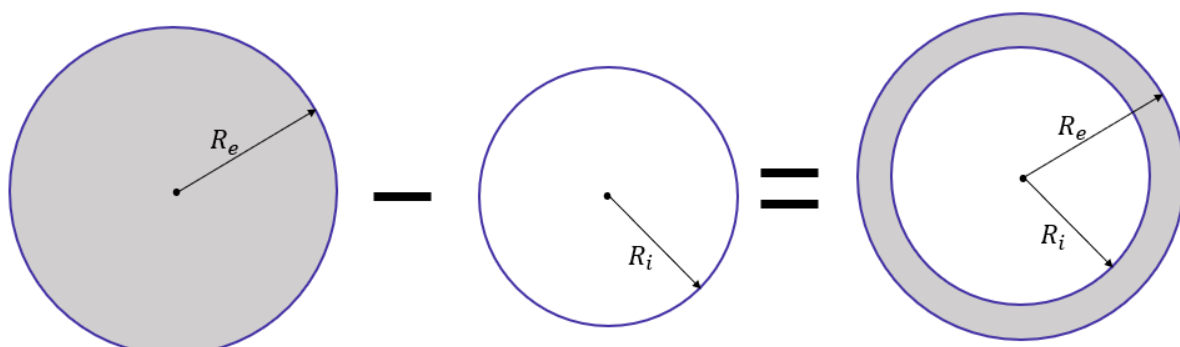
$$\boxed{\alpha = 240^\circ}$$

Gabarito: LETRA C.

Para finalizar essa parte de circunferência, gostaria de comentar com vocês sobre a **área de uma coroa**! É um tipo de problema envolvendo áreas de circunferências bem comum! Por isso, é bom estarmos atentos. Imagine a seguinte situação:



A região destacada acima é o que chamamos de **coroa circular**. Como fazemos para calcular sua área? Note que temos uma **circunferência externa de raio R_e** e uma **circunferência interna de raio R_i** . Podemos esquematizar a situação da seguinte forma:

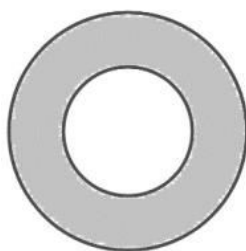


Assim, para calcular a área da coroa, devemos subtrair a área do círculo maior (externo) da área do círculo menor (interno), tudo bem?! Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \rightarrow A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \rightarrow A_{coroa} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$



(PREF. JOAO PESSOA/2024) Uma piscina no formato circular será construída em um clube e no centro dela terá uma ilha, também circular, como ilustrado na imagem abaixo.



Sabendo que o círculo maior possui 20 metros de diâmetro e o menor 10 metros de diâmetro. A área da piscina (parte cinza) será de: (Use $\pi = 3,14$)

- A) 75 m²
- B) 31,4 m²
- C) 235,5 m²
- D) 942 m²



Comentários:

Questão para calcular a **área da coroa**! Vamos lá! Primeiro, identificando as informações do enunciado:

$$\pi = 3,14 \quad ; \quad R_e = 10 \text{ cm} \quad ; \quad R_i = 5 \text{ cm}$$

Assim,

$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \rightarrow A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \rightarrow A_{coroa} = 3,14 \cdot 10^2 - 3,14 \cdot 5^2$$

$$A_{coroa} = 314 - 78,5 \rightarrow \boxed{A_{coroa} = 235,5 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA C.



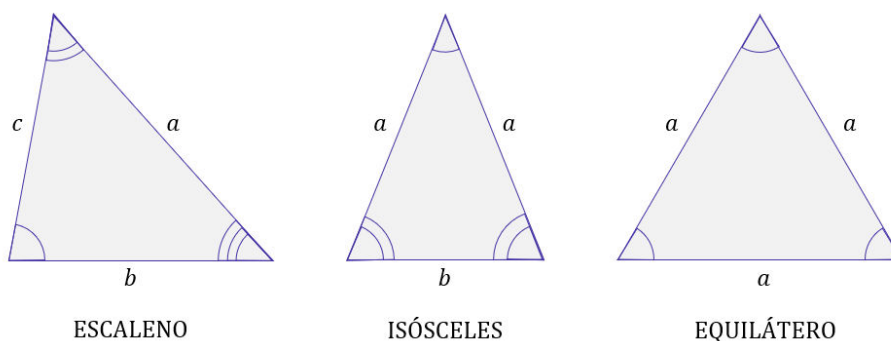
Triângulos

Agora falaremos um pouco sobre os triângulos. De modo simplificado, podemos definir um triângulo como uma **figura plana formada por três segmentos de reta**. Acontece que esses segmentos de reta não são dispostos de qualquer maneira. Eles devem formar três lados e três ângulos bem definidos, tudo bem?

Assim como na circunferência, nesse tópico falaremos sobre perímetros e áreas, mas tudo no seu devido tempo! Primeiro, devemos aprender **quais os tipos de triângulo existem** e suas características. Vamos?!

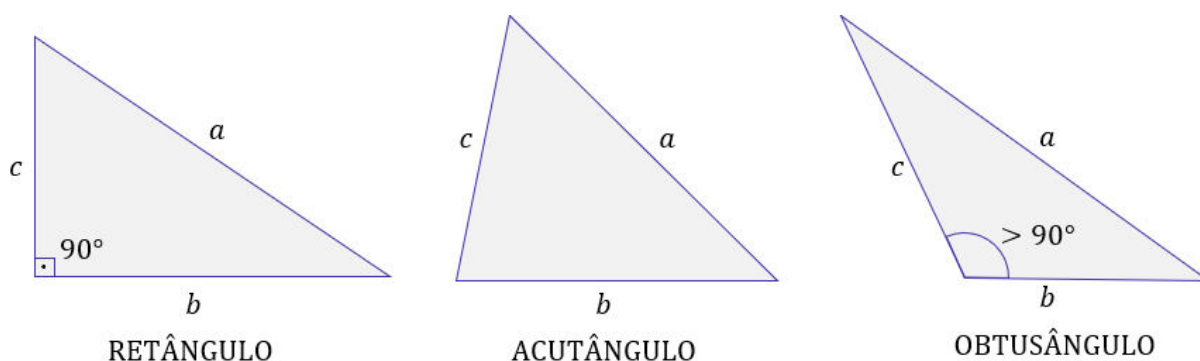
Classificações

Quando estamos olhando apenas para o lado, podemos classificar os triângulos de três maneiras.



- **Escaleno:** todo triângulo que possui os **três lados distintos**! $a \neq b \neq c$. Como consequência, os ângulos opostos a cada um desses lados também serão diferentes.
- **Isósceles:** triângulo que possui **dois lados iguais**. Os ângulos opostos a esses lados também serão idênticos.
- **Equilátero:** triângulo com **todos os lados iguais**. Assim, todos os ângulos internos desse tipo de triângulo também são congruentes, medindo exatamente 60° .

Já quando estamos olhando para os ângulos internos, podemos classificar os triângulos da seguinte forma:



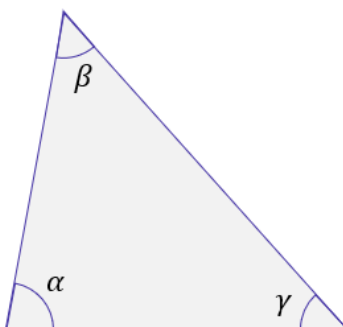
- **Retângulo:** **um dos ângulos do triângulo é um ângulo reto, isto é, de 90°** . Talvez, esse é o triângulo mais comum em provas. Afinal, é nele que utilizamos o famoso "Teorema de Pitágoras". Estudaremos esse triângulo com mais detalhes em breve.
- **Acutângulo:** **todos os ângulos do triângulo são agudos**, isto é, maiores que 0° e menores que 90° .
- **Obtusângulo:** **um dos ângulos do triângulo é um ângulo obtuso**, isto é, maior que 90° e menor que 180° .

Ângulos Internos e Externos

Feito esse parêntese para o estudo dos triângulos retângulos, vamos voltar a analisar os triângulos em geral. Pessoal, guardem aí com vocês o seguinte: **a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°** .

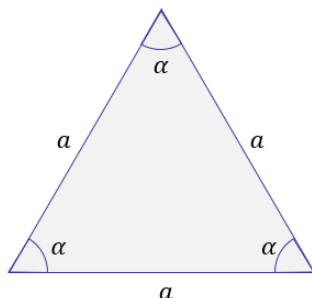


A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° !



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Lembre-se que no triângulo equilátero, todos os lados são iguais e que, com isso, temos que **todos os ângulos internos também são**! Em uma imagem, podemos representar assim:

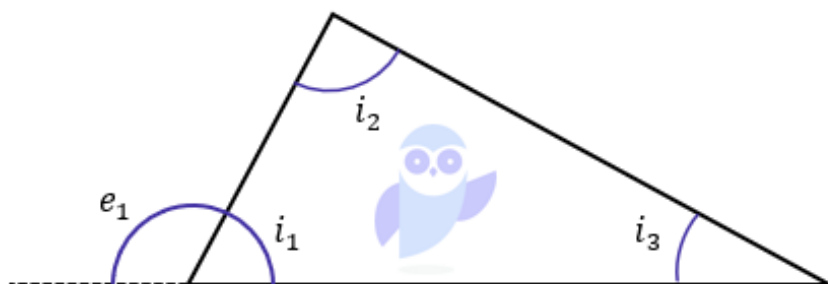


Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , temos que:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ \rightarrow 3\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

É por esse motivo que, sempre que estamos trabalhando com triângulos equiláteros, qualquer um de seus ângulos internos valerá 60° . Tudo certo até aqui?!

Por vezes, também falamos de **ângulos externos**. Existe um resultado bastante interessante que podemos obter tendo em mente o que discutimos até aqui. Veja a figura abaixo.



i_1 , i_2 e i_3 representam os três ângulos internos do triângulo e e_1 é um ângulo externo. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Assim,

$$i_1 + i_2 + i_3 = 180^\circ \quad (1)$$

Além disso, se você olhar bem para o ângulo interno 1 (i_1) e para o ângulo externo 1 (e_1), é possível ver que eles formam um **ângulo raso**. Dessa forma,

$$i_1 + e_1 = 180^\circ \quad (2)$$

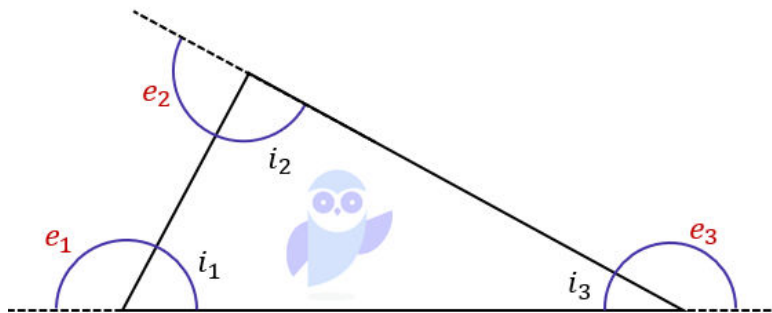
Quando comparamos as duas expressões, percebemos que a parte vermelha em (1) deve ser igual a parte vermelha em (2).

$$e_1 = i_2 + i_3$$

Conclusão: em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Já que estamos falando de ângulos externos, qual seria a soma dos ângulos externos de um triângulo?





Lembre-se que um ângulo externo em um triângulo sempre será igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Assim, podemos escrever:

$$e_1 = i_2 + i_3$$

$$e_2 = i_1 + i_3$$

$$e_3 = i_1 + i_2$$

Somando as três equações acima membro a membro (e chamando essa soma de S_e), ficamos com:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_2 + i_3) + (i_1 + i_3) + (i_1 + i_2)$$

Reorganizando:

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = (i_1 + i_2 + i_3) + (i_1 + i_2 + i_3)$$

Pessoal, $i_1 + i_2 + i_3$ é a soma dos ângulos internos. Quanto vale essa soma?! Oras, vale 180° !!

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 180^\circ + 180^\circ$$

$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 = 360^\circ$$

Note, portanto, que **a soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360°** . No final da nossa aula, veremos que podemos generalizar esse resultado para qualquer polígono convexo. No entanto, nesse momento, quero que você guarde apenas que:

A soma dos ângulos externos de um triângulo vale 360° .





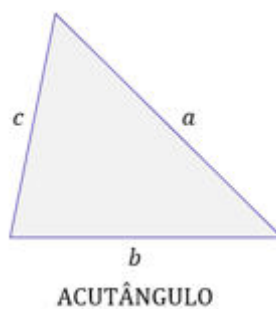
(PREF. CONDADO/2023) Um triângulo acutângulo é aquele que apresenta:

- A) um lado maior que os outros dois.
- B) dois lados que formam um ângulo agudo.
- C) dois lados que formam um ângulo obtuso.
- D) três ângulos agudos.
- E) três ângulos obtusos.

Comentários:

Questão bem direta, apenas para testar os conceitos que acabamos de aprender!

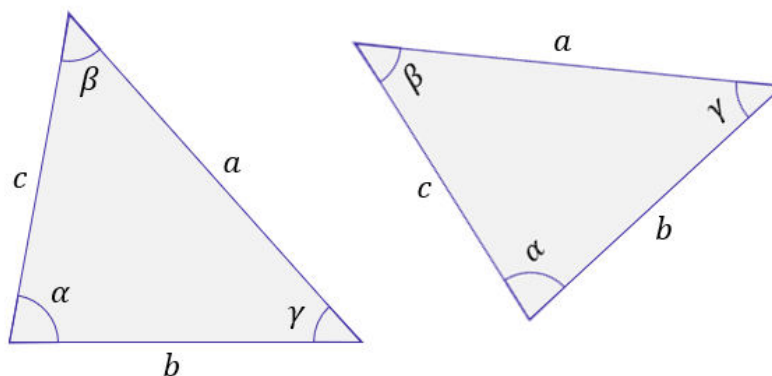
Lembre-se que um triângulo acutângulo é todo triângulo que possui **três ângulos agudos**! Isto é, são todos maiores que 0° e menores que 90° .



Gabarito: LETRA D.

Congruência e Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são congruentes quando eles são iguais. Veja o par de triângulos abaixo.



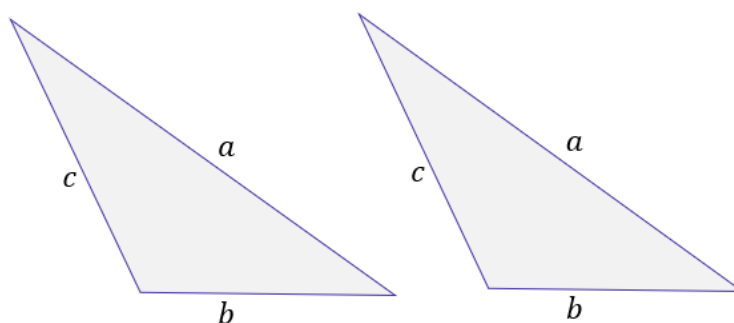
Note que **os dois triângulos são exatamente iguais**, um apenas está rotacionado com relação ao outro, podendo parecer que são diferentes. No entanto, se algum texto está falando de triângulos congruentes, ele está falando de triângulos idênticos! **Mesmo lados, mesmo ângulos! Não muda nadinha!**

A pergunta agora é: precisamos saber *todos os lados e todos os ângulos, dos dois triângulos, para determinar que são congruentes?* A resposta é: não! Nós podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos apenas com alguns valores de lados e/ou ângulos.

Critérios de Congruência

1. Lado-Lado-Lado (LLL)

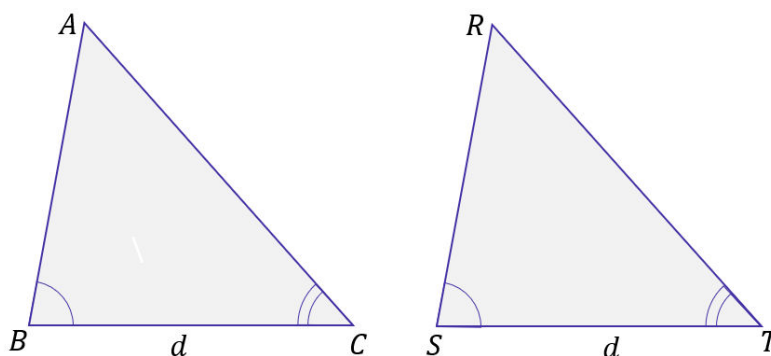
Se os dois triângulos possuírem os mesmos lados, então eles serão congruentes.



Esse critério nos diz que se os lados dos dois triângulos forem iguais, não precisamos nem olhar os ângulos. Só esse fato já nos garante que os dois são congruentes. *Ok?!*

2. Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

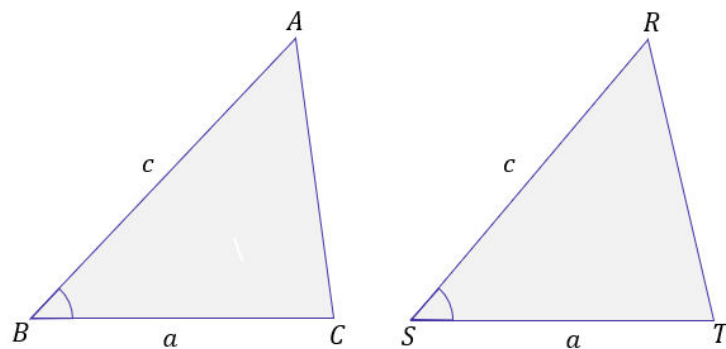
Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.



3. Lado-Ângulo-Lado (LAL)

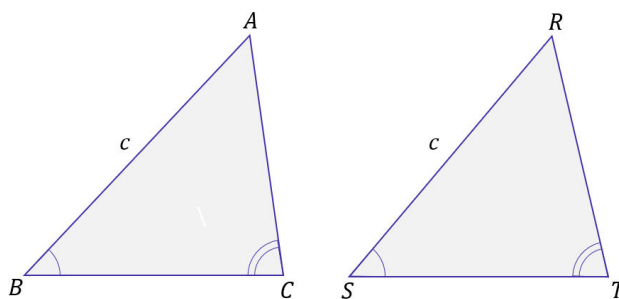
Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles iguais, então os triângulos são congruentes.





4. Ângulo-Ângulo-Lado (AAL)

Se dois triângulos possuem dois ângulos e um lado oposto a um desses ângulos iguais, então os triângulos são congruentes.



Esses são os critérios mais importantes! Resumindo para vocês: **dois triângulos são congruentes quando eles são idênticos entre si (lados e ângulos iguais)**. Acontece que, não é preciso sabermos todos os lados nem todos os ângulos para concluir que dois triângulos são iguais.

Quando utilizamos os critérios acima, podemos concluir pela congruência dos triângulos sabendo apenas algumas poucas informações. Tudo bem?! Na prática, **esse não é um conteúdo muito explorado em prova**. Em contrapartida, o tema de semelhança de triângulos despenca!! Vamos entrar de vez nesse assunto!

Semelhança de Triângulos

Pessoal, na semelhança de triângulos, vamos continuar com os três ângulos iguais. No entanto, os três lados devem ser proporcionais e não necessariamente iguais (como ocorre na congruência).

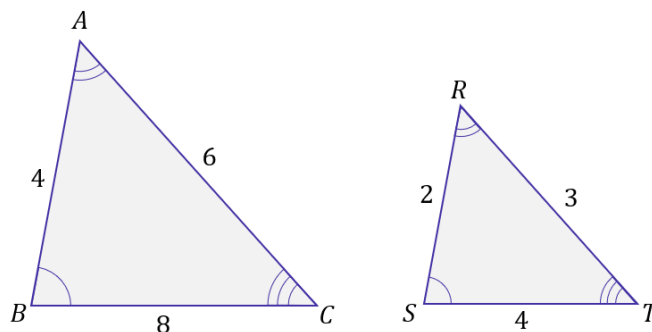


Triângulos Congruentes: ÂNGULOS E LADOS IGUAIS.

Triângulos Semelhantes: ÂNGULOS IGUAIS E LADOS PROPORCIONAIS.



Veja um par de triângulos semelhantes.



Os triângulos acima são semelhantes. Eles possuem ângulos internos iguais e os lados são proporcionais. Note que o triângulo ABC possui lado sempre o dobro do lado correspondente no triângulo RST.

$$\frac{AB}{RS} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{BC}{ST} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{AC}{RT} = \frac{6}{3} = 2$$

Chamamos esse "2" de razão de semelhança. Ele reflete a proporcionalidade entre os lados.

(PREF. CAPELA A ALEGRE/2023) A respeito da Geometria Plana, julgue se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F).

- I. Quaisquer dois triângulos que possuírem apenas dois ângulos correspondentes de mesma medida são congruentes.
- II. Quaisquer dois triângulos que possuírem apenas um ângulo correspondente de mesma medida são semelhantes.
- III. Quaisquer dois triângulos semelhantes são congruentes.
- IV. Quaisquer dois triângulos congruentes são semelhantes.

A opção que apresenta a sequência correta, de cima para baixo, é:

- A) F, F, V, V.
- B) F, F, F, V.
- C) V, F, V, F.
- D) F, V, F, F.
- E) V, V, F, V.



Comentários:

Vamos revisar as definições de congruência e semelhança entre triângulos.

Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados e os três ângulos correspondentes iguais. Isso significa que eles são exatamente iguais em forma e tamanho, podendo apenas ter posições diferentes no plano.

Dois triângulos são semelhantes quando têm os três ângulos correspondentes iguais e os lados proporcionais.

Agora, vamos analisar cada afirmação:

I. Quaisquer dois triângulos que possuam apenas dois ângulos correspondentes de mesma medida são congruentes.

Essa afirmação é **falsa**, pois para que dois triângulos sejam congruentes, **é necessário que os três ângulos e os três lados correspondentes sejam iguais**. Apenas dois ângulos iguais não garantem a congruência, pois os lados podem ter medidas diferentes.

II. Quaisquer dois triângulos que possuam apenas um ângulo correspondente de mesma medida são semelhantes.

Essa afirmação também é **falsa**, pois para que dois triângulos sejam semelhantes, **é necessário que os três ângulos correspondentes sejam iguais**. Apenas um ângulo igual não garante a semelhança, pois os outros ângulos podem ter medidas diferentes.

III. Quaisquer dois triângulos semelhantes são congruentes.

Essa afirmação é **falsa**, pois a **semelhança entre dois triângulos não implica na congruência**. Como vimos, dois triângulos semelhantes têm os mesmos ângulos, mas podem ter lados com medidas diferentes.

IV. Quaisquer dois triângulos congruentes são semelhantes.

Essa afirmação é **verdadeira**, pois a congruência entre dois triângulos implica na semelhança. Como vimos, dois triângulos congruentes **têm os mesmos ângulos e os mesmos lados**, satisfazendo a condição de semelhança.

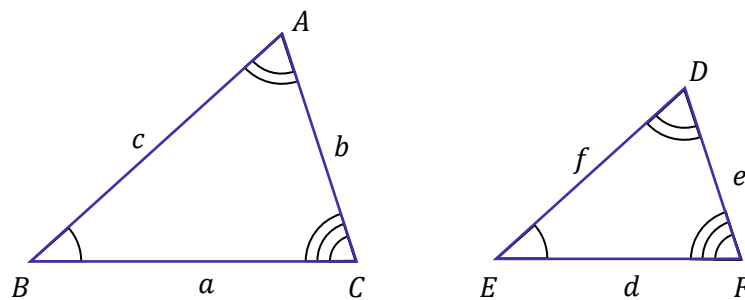
Portanto, o gabarito é a **alternativa B**.

Gabarito: LETRA B.

Professor, estou entendendo que quando temos triângulos com ângulos iguais e lados proporcionais, eles serão semelhantes. Mas, para que serve isso?

Se você identificar que dois triângulos são semelhantes, então poderá estabelecer **uma relação entre os lados desse triângulo**. Observe a figura abaixo.





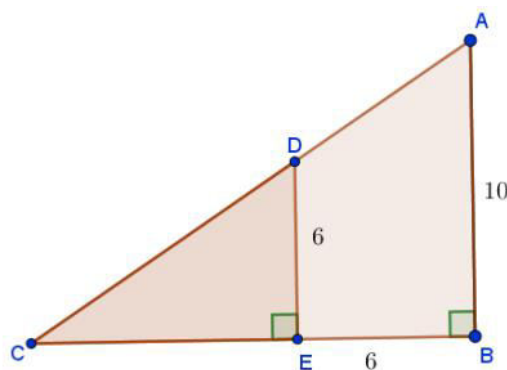
Galera, **ABC e DEF são triângulos semelhantes**. Com isso, sabemos que seus lados proporcionais. Por sabemos esse fato, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

Observe que sempre fazemos **a razão entre dois lados correspondentes**. Cuidado para não misturar tudo! Note que "**a**" e "**d**" são opostos ao mesmo ângulo, por isso, fazemos a razão a/d. Sugiro adotar essa forma de escrever as razões, para evitar confusão. Vamos ver na prática para entendermos melhor.



(PREF. XANGRI-LÁ/2023) A figura abaixo ilustra dois triângulos retângulos ABC e ECD:



Sabe-se que $AB = 10$, $DE = EB = 6$. Qual é a medida do segmento CE ?

- A) 6.
- B) 9.
- C) 12.
- D) 15.
- E) 18.



Comentários:

Pessoal, os triângulos ABC e CDE são semelhantes.

Professor, então sempre que isso acontecer os triângulos serão semelhantes?

Sim! A grande maioria das questões envolvem algum tipo de semelhança com triângulos retângulos. Então já fica esperto se cair algo parecido na sua prova!

Beleza! Entendi que são semelhantes, mas e agora?!

Ora, se são semelhantes, **seus lados são proporcionais** de forma que podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{10}{6} = \frac{6 + CE}{CE}$$

$$10CE = 36 + 6CE$$

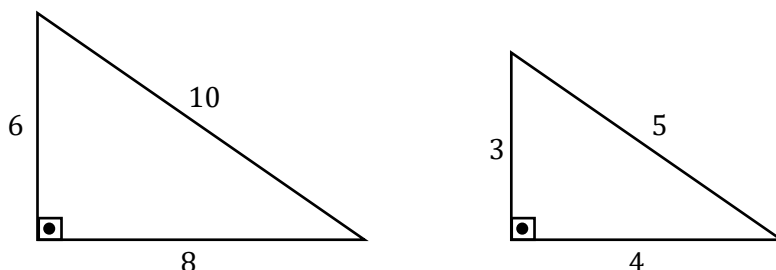
$$4CE = 36$$

$$\boxed{CE = 9}$$

Pessoal, uma vez que você conseguisse identificar a semelhança entre os triângulos retângulos, a parte mais chata da questão vira fazer a "continha" acima. Ressalto a importância de não misturar os lados. Sempre faça a razão entre dois lados correspondentes, isto é, **dois lados que estão opostos ao mesmo ângulo**.

Gabarito: LETRA B.

Galera, os lados são proporcionais. Mas, e as áreas dos triângulos, também serão?! A resposta é sim. No entanto, **as áreas serão proporcionais ao quadrado da razão de semelhança**. Explico melhor.



Como identificar que esses triângulos são semelhantes? Percebendo que os lados são proporcionais.

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$



Portanto, os triângulos são semelhantes e **a razão de semelhança é 2**.

Agora, sei que não estudamos como calcular a área de triângulo, portanto, não vou focar nesse cálculo, mas apenas no resultado. O triângulo retângulo maior tem área 24 e o menor, 6. Note que:

$$\frac{A_M}{A_m} = \frac{24}{6} \rightarrow \frac{A_M}{A_m} = 4 \rightarrow \frac{A_M}{A_m} = 2^2$$

A razão entre as duas áreas será igual a razão de semelhança que encontramos acima, **só que ao quadrado**. Esse resultado pode ser bastante útil, confira a questão abaixo.



(PREF. SJC/2019) Um professor afirmou aos seus alunos que dois triângulos eram semelhantes, e propôs a eles que determinassem a razão de semelhança do maior para o menor triângulo, sabendo que a área do menor triângulo era de 13,5 unidades de área e a área do maior era de 121,5 unidades de área. A resposta correta esperada por esse professor era:

- A) $\sqrt{3}$
- B) 3
- C) $3\sqrt{3}$
- D) 9
- E) $6\sqrt{3}$

Comentários:

Quando dois triângulos são semelhantes, **a razão de suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança**. Conforme vimos na teoria:

$$\frac{A_M}{A_m} = k^2$$

O enunciado nos informou que **$A_M = 121,5 \text{ u.a.}$** e **$A_m = 13,5 \text{ u.a.}$** . Vamos substituir na expressão para determinar o k.

$$\frac{121,5}{13,5} = k^2 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow \mathbf{k = 3}$$

Gabarito: LETRA B.

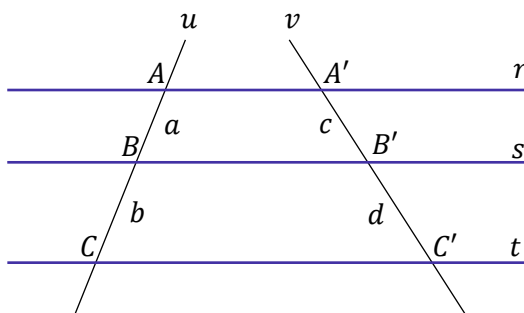


Teorema de Tales

Vou tentar ser bem objetivo nesse ponto da matéria. O enunciado clássico do Teorema é o seguinte:

"Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais."

Professor, é o quê? Vamos ver uma imagem!



u, v: são as retas **transversais** (que é toda reta que intercepta um feixe de retas paralelas);

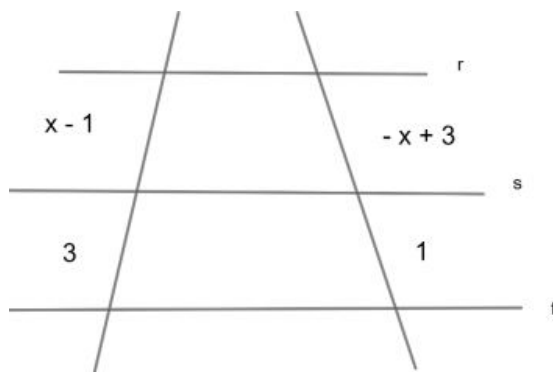
r, s, t: são as retas paralelas.

Sempre que conseguir identificar uma situação como acima, você poderá escrever que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A demonstração desse fato **não tem um custo-benefício razoável**, portanto, nos limitaremos a aplicar o resultado comentado anteriormente, tudo bem? Para ilustrar, vamos ver uma questão.

(ELETROCAR/2023) Considerando que $r \parallel s \parallel t$, o valor de x é:



- A) 2,5.
- B) 1,5.



- C) 3.
D) - 2,5.
E) - 0,5.

Comentários:

Essa é uma questão **bem clássica**! Observe que temos um feixe de retas paralelas intersectando duas retas transversais. Usando o **Teorema de Tales**, temos que:

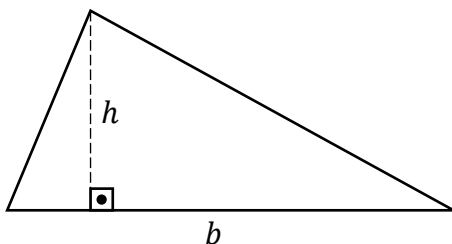
$$\frac{x-1}{3} = \frac{-x+3}{1} \rightarrow -3x+9 = x-1 \rightarrow 4x = 10 \rightarrow \boxed{x = 2,5}$$

Gabarito: LETRA A.

Área de um Triângulo

Pessoal, esse é **um dos tópicos mais importantes dessa aula**. Há diversas maneiras de calcularmos a área de um triângulo. De acordo com as informações que tivermos, usaremos uma fórmula ou outra.

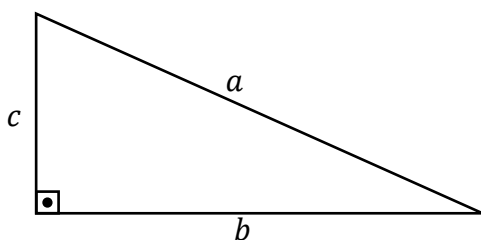
- Quando temos a base e a altura do triângulo.



"h" representa a medida da altura, enquanto "b" representa a medida da base. Quando tivermos essas informações, podemos calcular a área de um triângulo por meio da seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Quando o triângulo é retângulo

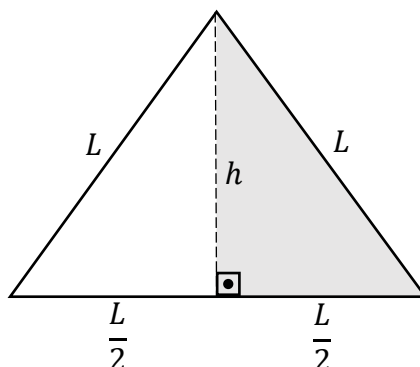


Galera, perceba que quando o triângulo é retângulo, a altura relativa à base "b" é o próprio cateto "c". Assim,



$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

- Quando o triângulo é equilátero



Quando o triângulo é equilátero, a **altura relativa a qualquer um dos lados, vai sempre dividir esse lado ao meio**. Agora, observe o triângulo retângulo em destaque. Com o teorema de Pitágoras, podemos determinar a altura "h" em função do lado "L".

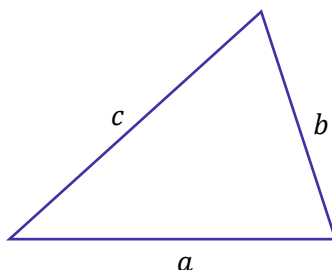
$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3L^2}{4} \rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Com isso, podemos usar a fórmula que vimos anteriormente, substituindo o valor da altura "h" por esse que acabamos de encontrar.

$$A = \frac{bh}{2} \rightarrow A = \frac{L \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \rightarrow A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, observe que existe uma fórmula "pronta" para calcularmos a área de um triângulo equilátero. **Se você sabe apenas o lado, já pode calcular a área**. No entanto, na prática, você não precisa memorizá-la. Se conhece a fórmula $A = bh/2$ e o Teorema de Pitágoras, **poderá deduzi-la a qualquer tempo**.

- Quanto temos apenas os lados do triângulo.



Nessas situações, usaremos a famosa **fórmula de Heron**. Não é tão comum à sua cobrança em provas, mas é bom estarmos espertos. Quando você tiver todos os lados mas não sabe os ângulos nem as alturas, a fórmula abaixo resolve sua vida:



$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Não é uma fórmula muito amigável, eu sei. Sorte nossa que **ela cai muito pouco**. Aqui, o "p" representa o **semiperímetro**, que pode ser determinado por meio da fórmula abaixo!

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Peço que não se preocupe com a demonstração, pois **o custo-benefício de fazê-la aqui é quase nulo**. Nessas horas, vamos tentar ser o mais prático e objetivo possível.

(PREF. SJC/2023) Um triângulo equilátero tem perímetro igual a 36 dm. A área da região interior a esse triângulo mede

- A) $6\sqrt{2} \text{ dm}^2$
- B) $36\sqrt{2} \text{ dm}^2$
- C) $36\sqrt{3} \text{ dm}^2$
- D) $72\sqrt{2} \text{ dm}^2$
- E) $72\sqrt{3} \text{ dm}^2$

Comentários:

Um triângulo equilátero é um triângulo com **os três lados iguais**. Se **o perímetro desse triângulo é 36 dm**, podemos escrever:

$$3L = 36 \quad \rightarrow \quad L = 12 \text{ dm}$$

Pronto. "L" é o lado do nosso triângulo.

Vimos que **a área de um triângulo equilátero** pode ser encontrada por:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Substituindo "L", ficamos com:

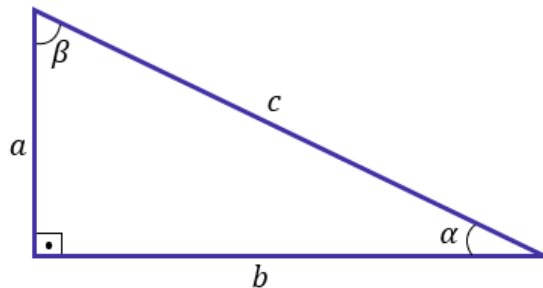
$$A = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad A = \frac{144\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 36\sqrt{3}}$$

Gabarito: LETRA C.



Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é tão importante que estudaremos ele em separado! Lembrem-se que chamamos de triângulo retângulo qualquer triângulo que possua **um de seus ângulos igual a 90 graus** ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.



- O lado c é chamado de **hipotenusa**. **Ele é o maior dos lados** e está oposto ao ângulo de 90° .
- Os lados a e b são os **catetos**.
 - Com relação ao ângulo α , a é o cateto oposto e b é o cateto adjacente.
 - Com relação ao ângulo β , b é o cateto oposto e a é o cateto adjacente.

Relações Trigonométricas - Seno, Cosseno e Tangente

Moçada, eu sei que essa é uma parte da trigonometria e por isso não vou me aprofundar muito, mas vale a pena você saber as seguintes relações trigonométricas para a sua prova de geometria plana!

- **Seno**

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Cosseno**

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Tangente**

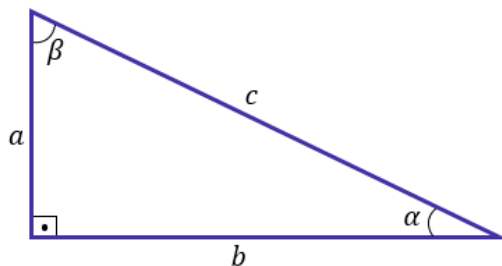
$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

- **Relação Fundamental**

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$



Teorema de Pitágoras



O Teorema de Pitágoras é um grande clássico dos nossos estudos, não é verdade? Desde muito cedo, quando crianças, escutamos falar desse teorema. Vamos rever o que ele diz!

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Matematicamente, podemos escrever:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



(PREF. PIRASSUNUNGA/2023) Um espaço reservado para uma exposição de quadros possui o formato de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 30 decímetros e 40 decímetros. Dessa forma, o perímetro do espaço reservado para essa exposição, em metros, é igual a:

- A) 10.
- B) 12.
- C) 15.
- D) 17.
- E) 19.

Comentários:

Temos um triângulo retângulo em que **os catetos são 30 e 40 dm**. Para o cálculo do perímetro, precisamos também da hipotenusa. Sendo assim, podemos usar o **Teorema de Pitágoras** para encontrá-la:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 30^2 + 40^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 900 + 1600 \quad \rightarrow \quad c^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad \boxed{c = 50 \text{ dm}}$$



Temos todos os lados, **o perímetro é dado pela soma deles.**

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$

$$\text{Perímetro} = 30 + 40 + 50$$

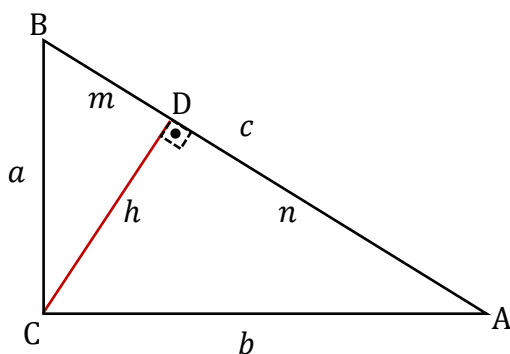
$$\boxed{\text{Perímetro} = 120 \text{ dm}}$$

Como queremos o resultado em metros, devemos dividir o resultado por 10. **Perímetro = 12 dm.**

Gabarito: LETRA B.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Saber as fórmulas que veremos agora pode poupar preciosos minutos na hora da sua prova. No entanto, caso não as lembre, saiba que sempre poderá deduzi-las (conforme faremos a seguir), pois são apenas consequências da **semelhança de triângulos**! Inicialmente, observe o desenho:

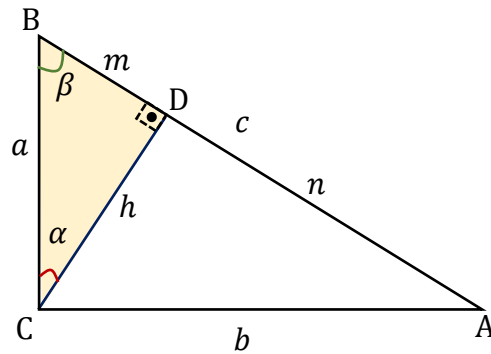
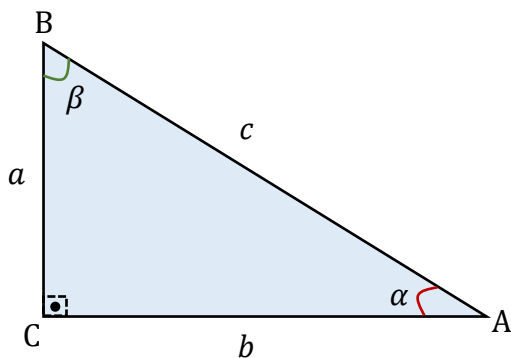


Na figura acima, temos: os catetos (a e b), a hipotenusa (c), a altura relativa à hipotenusa (h) e as partes da hipotenusa (m e n). Caso você queira encontrar a altura relativa à hipotenusa, como procederia? Observe que **os triângulos ABC e BCD são semelhantes**. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

Se você não enxergou essa semelhança, vem comigo aqui!





Observe que separei os dois triângulos semelhantes em questão: o azul (ABC) e o amarelo (BCD). Eles são semelhantes pois, apesar de terem lados diferentes, **seus ângulos internos são todos iguais!**

Beleza, professor. Mas, sabendo disso, como faço a semelhança?

Vamos lá! Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo ABC?

É o lado "c".

Qual lado está em frente ao **ângulo reto** no triângulo BCD?

É o lado "a".

Com isso, já temos o lado esquerdo da nossa semelhança:

$$\frac{c}{a} =$$

Agora, vamos olhar outro ângulo.

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo ABC?

É o lado "b".

Qual lado está em frente ao **ângulo β** no triângulo BCD?

É a altura "h".

Com isso, nossa semelhança fica:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h}$$



Isolando o "h":

$$h = \frac{ab}{c}$$

Pronto! Esse é o passo a passo para chegarmos na nossa primeira relação métrica! **Esse será o procedimento que usaremos para encontrar todas as outras.** Obviamente, usando outras semelhanças e lados/segmentos.

Na prática, a expressão que acabamos de encontrar nos diz que a altura relativa à hipotenusa é igual ao produto dos catetos dividido pela hipotenusa.

Professor, temos uma outra forma de encontrar essa altura? Temos sim! Observe.

Da semelhança entre os triângulos **BCD e CDA**:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h^2 = mn \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{mn}}$$

Ah, entendi! Mas como fazemos para determinar o "m" e o "n"?

Para você entender melhor, perceba que quando descemos a altura relativa à hipotenusa, **essa altura toca a hipotenusa no ponto D**. Chamamos esse ponto de D de "pé da altura". Ele divide a hipotenusa em duas partes, **uma de comprimento "m" e outra de comprimento "n"** tal que $m + n = c$. Para encontrar a medida desses segmentos, usamos mais semelhanças.

Da semelhança entre os triângulos **ABC e BCD**, podemos tirar o seguinte:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{m} \quad \rightarrow \quad a^2 = cm \quad \rightarrow \quad \boxed{m = \frac{a^2}{c}}$$

Analogamente, da semelhança entre os triângulos **ABC e ACD**, temos:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{n} \quad \rightarrow \quad b^2 = cn \quad \rightarrow \quad \boxed{n = \frac{b^2}{c}}$$

Vamos ver como isso tudo já caiu em prova?

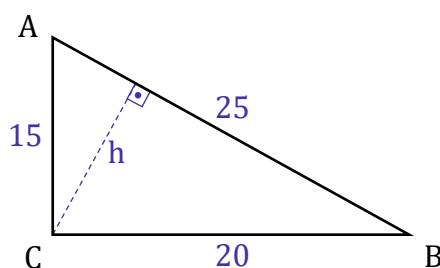


(SEFAZ-MT/2023) Um triângulo retângulo tem lados iguais a 15, 20 e 25. A altura relativa à hipotenusa é igual a

- A) 10.
- B) 12.
- C) 15.
- D) 18.
- E) 21.

Comentários:

Vamos desenhar esse triângulo.



Na nossa teoria de relações métricas no triângulo retângulo, vimos que **a altura relativa à hipotenusa** é obtida por meio de:

$$h = \frac{ab}{c}$$

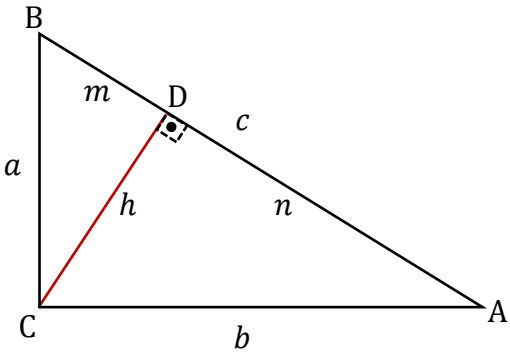
Em que "a" e "b" são as medidas dos catetos e "c" é a medida da hipotenusa. Com isso:

$$h = \frac{20 \cdot 15}{25} \rightarrow h = \frac{300}{25} \rightarrow \boxed{h = 12}$$

Gabarito: LETRA B.

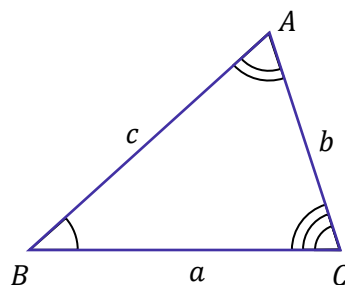
Galera, eu sei que essa parte pode pegar um pouco no pé! São expressões que podem ser chatinhas, mas lembre-se sempre que você poderá deduzi-las usando **semelhança de triângulos**. Gaste a maior parte de sua energia não tentando decorá-las, mas sim aprendendo a como chegar nelas. De qualquer forma, vou resumir tudo que vimos em uma tabela, para facilitar sua revisão!



Relações Métricas no Triângulo Retângulo	
	$ab = hc$
	$h^2 = mn$
	$a^2 = mc$
	$b^2 = nc$
	$c = m + n$

Lei do Senos e a Lei dos Cossenos

Para aproveitar que falamos um pouco de seno e cosseno nessa aula, quero conversar com vocês sobre duas leis que relacionam as medidas dos lados de um triângulo com os senos e cossenos dos ângulos internos. Considere o triângulo genérico abaixo.



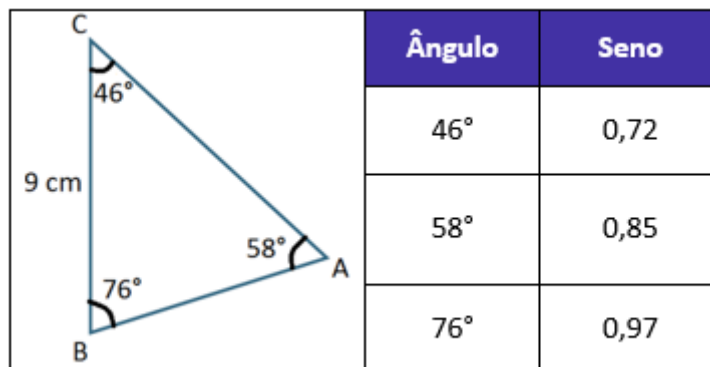
De acordo com a lei dos senos, a razão entre o lado e o seno do ângulo oposto é uma constante no triângulo. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Para entender melhor como pode ser a cobrança desse tema, vamos fazer uma questão.



(PREF. PATROCÍNIO/2023) Considere o triângulo ABC na figura, cuja medida do lado BC é 9 cm. Utilizando os valores aproximados de seno dos ângulos agudos dados na tabela, indique a alternativa que contém a medida aproximada do lado AB.



- A) 6,8 cm.
- B) 7,6 cm.
- C) 8,5 cm.
- D) 10,3 cm.

Comentários:

Observe que podemos usar a **Lei dos Senos** para encontrar a medida do lado AB.

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$$

Substituindo com as informações que temos:

$$\frac{9}{\sin 58^\circ} = \frac{AB}{\sin 46^\circ}$$

$$\frac{9}{0,85} = \frac{AB}{0,72}$$

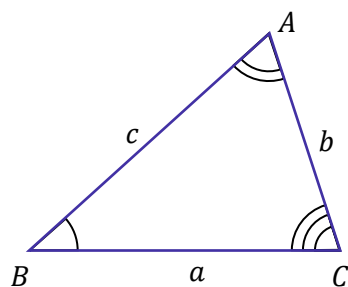
$$AB = \frac{6,48}{0,85}$$

$$\boxed{AB = 7,62 \text{ cm}}$$

Gabarito: LETRA B.



Por sua vez, a **lei dos cossenos** vai relacionar os lados de um triângulo qualquer com o cosseno de um dos ângulos. Guarde com você o seguinte:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observe o esquema abaixo para entender melhor as expressões.

"a" é o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$

$$a^2 = \underbrace{b^2 + c^2 - 2bc}_{b \text{ e } c \text{ são os demais lados}} \cdot \cos \hat{A}$$

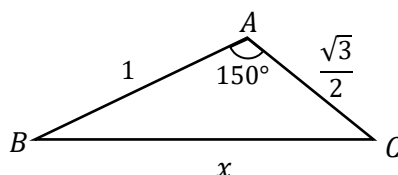
Eu sei que pode estar pairando a dúvida sobre de onde vem essa expressão. A demonstração tanto da lei dos senos quanto da dos cossenos tem custo-benefício mínimo. Para sua prova de concurso, precisará apenas aplicá-la. Por isso, vamos ver uma questão para sentir na prática como funciona essa tal de lei dos cossenos.

(PREF. CATURITÉ/2023) O professor Pitagorisvaldo estava revisando Geometria quando se deparou com a seguinte situação: Num plano, seja ABC um triângulo tal que $\hat{BAC} = 150^\circ$, $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u.c. e $\overline{AB} = 1$ u.c. Qual a medida, em unidades de comprimento, do lado BC?

- A) $\sqrt{13}/2$
- B) $\sqrt{11}/2$
- C) $\sqrt{15}/2$
- D) $\sqrt{17}/2$
- E) $\sqrt{19}/2$

Comentários:

Vamos desenhar o triângulo do enunciado!



Essa é uma situação clássica em que podemos aplicar a **Lei dos Cossenos**!

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \cos 150^\circ$$

$$x^2 = \frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x^2 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}$$

$$x^2 = \frac{13}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Gabarito: LETRA A.



Ângulo Notável	Seno	Cosseno
0°, 360°	0	1
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0

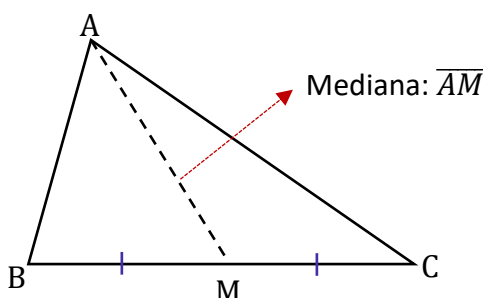


Pontos notáveis no triângulo

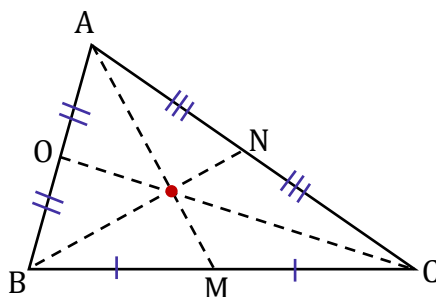
No estudo do triângulo, existem quatro pontos que precisam ser estudados com atenção: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro. Veremos todos eles com detalhes a seguir!

Baricentro

Galera, para entender o baricentro, precisamos primeiro entender o que é uma mediana. A mediana nada mais é do que um **segmento de reta que vai ligar um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice**. Vamos visualizar essa situação para entender melhor!



Beleza! Agora note que um triângulo não possui apenas uma mediana! Podemos traçar uma mediana para cada vértice. Observe!



Observe que essas medianas se encontram em um ponto (que destaquei em vermelho). Esse é o nosso baricentro! Anote aí, então!

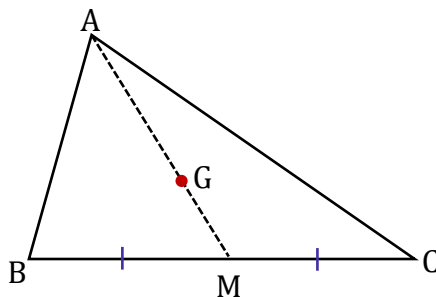


Baricentro é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo.



Professor, e esse baricentro tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele divide a mediana em duas partes de tal forma que uma mede o dobro da outra! Vou explicar melhor no desenho! Vem cá!



Para a imagem não ficar muito poluída, desenhei apenas uma mediana e coloquei o baricentro (G). Observe que o ponto G divide a mediana em dois segmentos: **o AG e o GM**. A propriedade que devemos guardar é:

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

Guarde sempre que o segmento que contém o vértice (AG) **mede o dobro** do segmento que contém o ponto médio (GM).

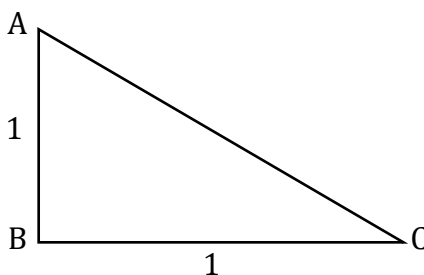


(CBM-AL/2021) Acerca de triângulos, julgue o próximo item.

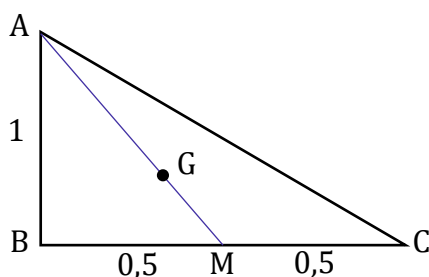
Considere o triângulo retângulo e isósceles ABC, com lados $AB = BC = 1$. Nesse caso, sendo G o baricentro desse triângulo, é correto afirmar que o segmento AG é igual a $\sqrt{\frac{2}{6}}$.

Comentários:

O primeiro passo é desenhar esse triângulo retângulo e isósceles de lado **igual a 1**.



Como a questão falou em baricentro, é importante desenhar a mediana também. Note que ele fala de segmento AG, logo vamos traçar a **mediana relativa ao vértice A**.



Lembre-se que a mediana toca no **ponto médio do lado oposto**. Por esse motivo, ficou "0,5" de um lado e "0,5" do outro.

Agora, note que estamos procurando a medida do segmento AG. Para isso, primeiramente devemos encontrar a medida do segmento AM. Esse segmento é a **hipotenusa do triângulo retângulo ABM**. Logo, vamos usar o Teorema de Pitágoras para encontrá-lo.

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$AM^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow AM^2 = 1 + \frac{1}{4} \rightarrow AM^2 = \frac{5}{4} \rightarrow AM = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad (1)$$

Nesse momento, devemos observar que:

$$AM = AG + GM \quad (2)$$

Como G é o baricentro, podemos usar a propriedade que vimos na teoria:

$$\mathbf{AG = 2GM} \rightarrow GM = \frac{AG}{2} \quad (3)$$

Usando esse (3) em (2):

$$AM = AG + \frac{AG}{2} \rightarrow AM = \frac{3AG}{2}$$

Vamos **isolar AG** pois é quem estamos procurando:

$$AG = \frac{2AM}{3} \quad (4)$$



Pronto! Agora vamos usar o resultado (1) em (4).

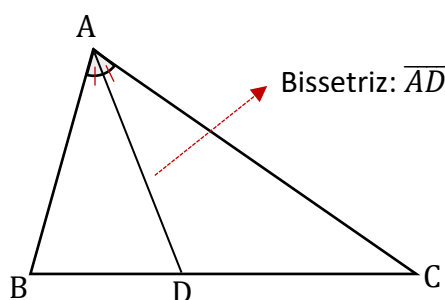
$$AG = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{4}} \rightarrow \boxed{AG = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Gabarito: ERRADO.

Para encerrarmos essa parte de **baricentro**, saiba também que ele é o **centro de gravidade do triângulo**. Por esse motivo, costumamos representá-lo pela letra "G".

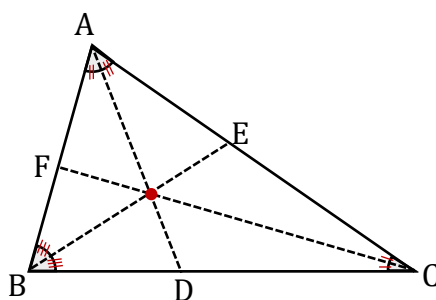
Incentro

Para entender o que é o incentro, é necessário entender o que é a **bissetriz interna de um triângulo**. A bissetriz interna nada mais é do que um segmento de reta que divide um ângulo interno em dois ângulos iguais. Vamos visualizá-la no desenho para melhor compreensão.



Moçada, não confunda! Enquanto a mediana está preocupada em dividir o lado oposto em dois segmentos iguais, **a bissetriz interna se preocupa em dividir o ângulo interno em dois iguais**. Ela pode tocar em qualquer ponto do lado oposto.

Mais um vez, perceba que o triângulo não possui apenas uma bissetriz interna, mas três!



Logo, quando desenharmos as três bissetrizes de um triângulo, notamos que elas se encontram em um ponto. É exatamente esse ponto que chamamos de incentro.

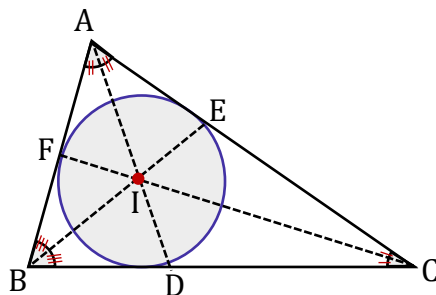




Incentro é o ponto de encontro das três **bissetrizes internas** de um triângulo.

Professor, esse ponto tem alguma propriedade especial?

Tem sim! Ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo!

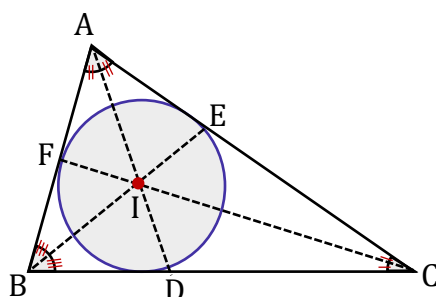


(PREF. PAÇO DO LIMIAR/2019) O centro de uma circunferência inscrita em um triângulo é facilmente obtido quando se determina o:

- A) Autocentro.
- B) Baricentro.
- C) Circuncentro.
- D) Incentro.

Comentários:

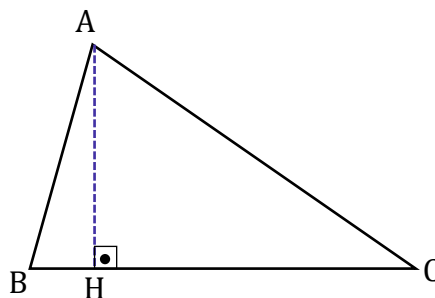
Conforme vimos, é o **incentro (I)** que coincide com o centro da circunferência **inscrita** no triângulo.



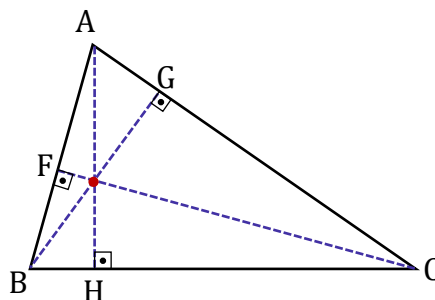
Gabarito: LETRA D.

Ortocentro

Para entender o ortocentro, precisamos entender o que é a altura. A altura de um triângulo nada mais é do que o segmento de reta que parte de um dos vértices e toca no lado oposto fazendo um ângulo de 90° . Vamos desenhar.



Sendo assim, como temos três vértices e três lados, podemos concluir que teremos três alturas. Vamos desenhar todas elas.



Perceba, portanto, que as alturas de um triângulo também se encontram em um ponto. É esse ponto que nós chamamos de **ortocentro**.

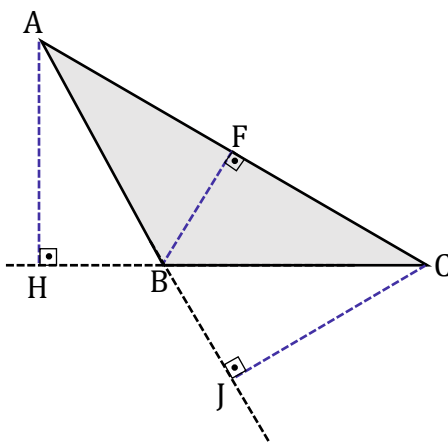


Ortocentro é o ponto de encontro das **três retas suportes da altura** de um triângulo.

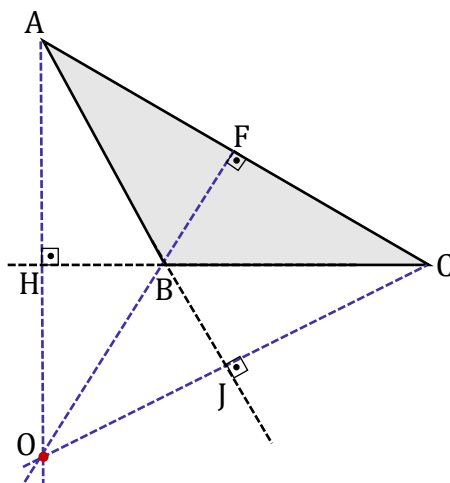
Opa!! Professor, o senhor vinha falando de altura, mas na definição falou de reta suporte da altura. O que aconteceu?



Galera, acontece que nem sempre a altura será interna ao triângulo. Algumas vezes ela será externa e precisaremos traçar uma reta suporte para encontrar o ortocentro. Vamos desenhar essa situação.



Perceba que o triângulo ABC possui alturas que são externas ao triângulo (CJ e AH). Se desenharmos dessa forma, não conseguiremos encontrar o incentro, pois **as alturas não estão se encontrando**. Isso significa que o ortocentro não existe? Não!! Pois o ortocentro é o **ponto de encontro das retas suportes da altura**. Na prática, nós vamos simplesmente prolongar as alturas até elas se encontrarem!



Note que, nessas situações, o ortocentro é externo ao triângulo. Não há problema algum.



(PREF. HORIZONTINA/2021) Marcar C para as afirmativas Certas, E para as Erradas e, após, assinalar a alternativa que apresenta a sequência CORRETA:



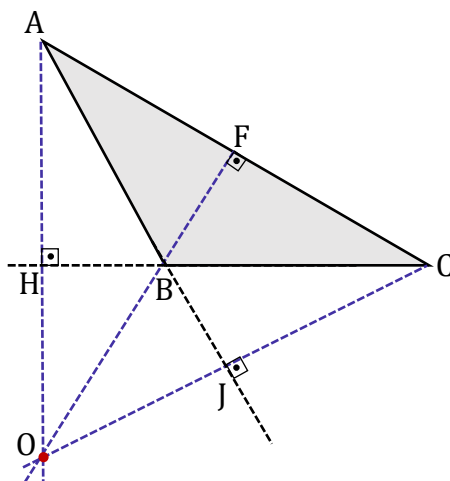
- () O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.
() O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
() Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
() O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.
- A) E - E - E - C.
B) E - E - C - C.
C) C - E - E - C.
D) C - C - C - E.
E) C - C - E - C.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das afirmativas.

- (E) O ortocentro de um triângulo qualquer é sempre interno ao triângulo.

Errado! Acabamos de ver uma situação em que o ortocentro estava **externo** ao triângulo.



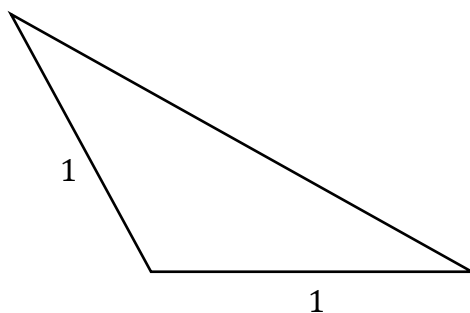
- () O incentro de um triângulo qualquer é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.

Errado! O incentro é o ponto de interseção das **bissetrizes internas** de um triângulo. Lembre-se que o encontro das medianas é o baricentro.

- () Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

Errado! Podemos ter um triângulo isósceles que é um **triângulo obtusângulo**. Podemos desenhar como exemplo um triângulo da forma:





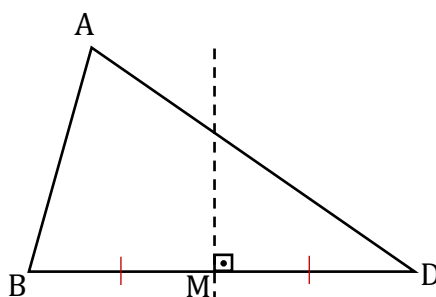
() O ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo qualquer equivale ao centro de um círculo inscrito nesse triângulo.

Correto! Lembre-se que o ponto de intersecção das bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro**. Vimos que o incentro coincide com o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Gabarito: LETRA A.

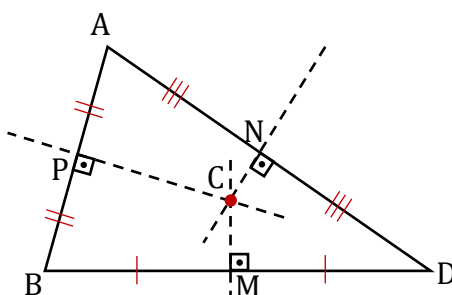
Circuncentro

Esse é o nosso último ponto notável. Para entendê-lo, é preciso conhecer a mediatriz. No contexto do estudo de triângulos, a mediatriz é um segmento de reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do lado. *Como assim, professor?! Vamos para o desenho!*



Galera, o importante de perceber aqui é o seguinte: a mediatriz não precisa partir do vértice! Ela pode vir de qualquer lugar. **Nossa preocupação aqui é dividir o lado no meio e perpendicularmente!!** Para satisfazer essas duas condições, ela não precisa partir do vértice, ok?!

Mais uma vez, você deve ter percebido que teremos três mediatrizes em um triângulo. Vamos desenhá-la.



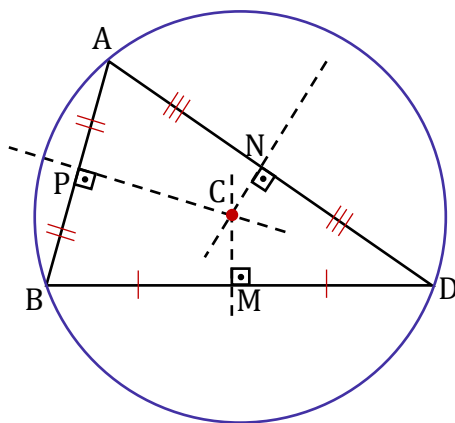
Observe que as mediatrizes se encontram em um ponto! Chamamos esse ponto de circuncentro.



Circuncentro é o ponto de encontro das **três mediatrizes** dos lados do triângulo.

Professor, percebi que todo ponto notável que vimos até agora tem uma propriedade especial. O circuncentro também possui uma?

Sim! Saiba que **o circuncentro coincide com o centro da circunferência circunscrita ao triângulo!**



Bem legal, né?!



(PREF. ALTA FLORESTA/2019) Em um triângulo qualquer ABC, encontramos circuncentro quando:

- A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.
- B) Traçamos as três medianas deste triângulo.
- C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.
- D) Traçamos as três alturas deste triângulo.
- E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

Comentários:

Questão bem direta, mas vamos analisar todas as alternativas!



A) Traçamos o triângulo dentro de uma circunferência.

Errado, pessoal! Por mais que o circuncentro coincida com o centro da circunferência circunscrita, apenas desenhar o triângulo dentro da circunferência não é suficiente para encontrarmos esse ponto notável.

B) Traçamos as três medianas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três medianas obtemos o baricentro.

C) Traçamos as três bissetrizes deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três bissetrizes internas do triângulo obtemos o incentro.

D) Traçamos as três alturas deste triângulo.

Errado! Quando traçamos as três alturas de um triângulo obtemos o ortocentro.

E) Traçamos as três mediatrizes deste triângulo.

Correto! É isso mesmo! Quando traçamos as três mediatrizes do triângulo conseguimos encontrar o seu circuncentro!

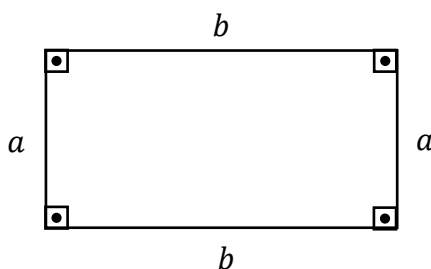
Gabarito: LETRA E.



Quadriláteros

Nessa seção, mostrarei para vocês os quadriláteros mais conhecidos. Serei bem objetivo e quero que vocês deem especial atenção para as fórmulas de área. Combinado?!

Retângulo



$$\text{ÁREA} = a \cdot b$$

Características Principais:

- Comprimento: "b"; Largura: "a";
- Ângulos internos são iguais a 90°;
- Lados opostos são iguais

(CBM-PA/2024)

“...e, graças à atuação do corpo de bombeiros, apenas 5% da reserva florestal foi perdida no incêndio”.

Considerando-se que o formato da reserva florestal citada no trecho da reportagem precedente corresponda a um retângulo de 800 metros de largura por 1.200 metros de comprimento, conclui-se que a área queimada no incêndio, em m², corresponde a

- A) 760.
- B) 1.140.
- C) 48.000.
- D) 192.000.
- E) 480.000.

Comentários:

O primeiro passo é calcular a área da reserva florestal. Como o formato dela é retangular, basta multiplicar a largura pelo comprimento.

$$A = 800 \cdot 1.200$$

$$A = 960.000 \text{ m}^2$$



De acordo com os bombeiros, **5% da reserva foi perdida no incêndio.**

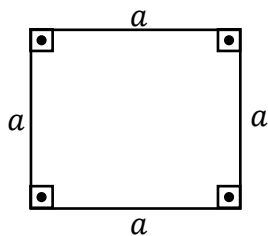
$$A_p = 960.000 \cdot 5\%$$

$$A_p = 960.000 \cdot \frac{5}{100}$$

$$A_p = 48.000$$

Gabarito: LETRA C.

Quadrado



$$\text{ÁREA} = a^2$$

Características Principais:

- Todos os lados são iguais;
- Todos os ângulos internos são iguais a 90° ;
- É um polígono regular.

(PREF. SP/2024) Para efeito didático, um quadrado com área de $0,36 \text{ m}^2$ precisará ser representado na lousa, com suas medidas dadas em centímetros. O perímetro desse quadrado deverá ser igual a

- A) 24 cm.
- B) 60 cm.
- C) 6 cm.
- D) 240 cm.
- E) 180 cm.

Comentários:

Inicialmente, lembre-se que:

- A **área de um quadrado** é igual ao produto da medida do lado pelo próprio lado: $A = l^2$.
- O **perímetro de um quadrado** é igual à soma dos quatro lados: $P = 4l$.



Pela **fórmula da área**, podemos encontrar a medida do lado do quadrado:

$$\begin{aligned}A &= l^2 \\0,36 &= l^2 \\l &= \sqrt{0,36} \\l &= 0,6 \text{ m}\end{aligned}$$

Portanto, **o lado do quadrado mede 0,6 m.**

Agora, usando a **fórmula do perímetro**, temos:

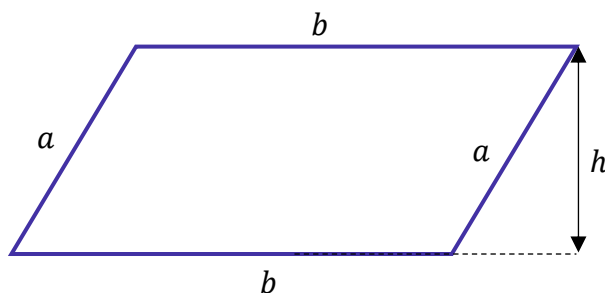
$$\begin{aligned}P &= 4l \\P &= 4 \cdot 0,6 \\P &= 2,4 \text{ m}\end{aligned}$$

Como queremos o perímetro em cm, vamos multiplicar o resultado acima por 100, já que **1 m = 100 cm**.

$$P = 2,4 \cdot 100 = 240 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

Paralelogramo



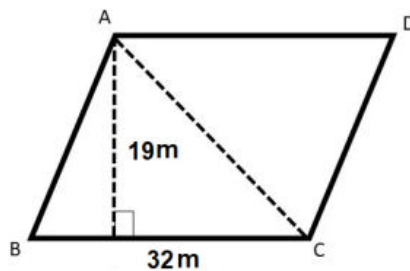
$$\text{ÁREA} = b \cdot h$$

Características Principais:

- Lados opostos são iguais (congruentes) e paralelos;
- Ângulos opostos são iguais (congruentes)
- A área é dada em função da altura "h" e esse "h" nem sempre vai estar disponível para nós. Na maioria das vezes, teremos que usar um pouco dos conhecimentos sobre triângulos retângulos, tudo bem?

(SAAE - INDAIATUBA/2023) Observe a imagem abaixo e assinale a alternativa que apresenta a área deste paralelogramo.





- A) 320 m².
- B) 712 m².
- C) 318 m².
- D) 520 m².
- E) 608 m².

Comentários:

Questão bem direta para **aplicarmos a fórmula** que acabamos de ver. De acordo com a figura, podemos concluir que:

$$b = 32 \quad h = 19$$

A **área do paralelogramo** é:

$$A_{\text{paralelogramo}} = bh$$

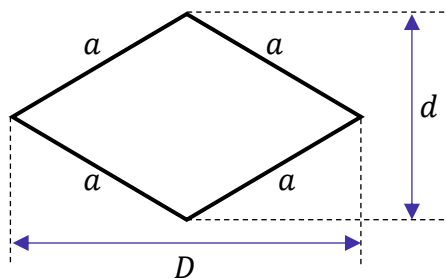
Substituindo os valores:

$$A_{\text{paralelogramo}} = 32 \cdot 19$$

$$\boxed{A_{\text{paralelogramo}} = 608}$$

Gabarito: LETRA E.

Losango



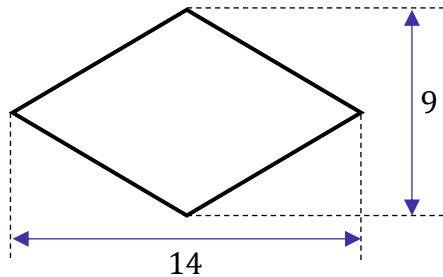
$$\boxed{\acute{A}REA = \frac{D \cdot d}{2}}$$



Características Principais:

- O losango é um paralelogramo com todos os lados iguais;
- É também chamado de paralelogramo equilátero;
- Ângulos opostos iguais;
- "D" é a medida da diagonal maior, enquanto "d" é a medida da diagonal menor.

(PREF. INÁCIO MARTINS/2023) Determine a área do losango da figura a seguir.



- A) 32 m²
- B) 52 m²
- C) 63√2 m²
- D) 52√2 m²
- E) 63 m²

Comentários:

Observe que a figura aponta diretamente as **duas diagonais do losango**.

Sendo assim, podemos aplicar a **fórmula da área**:

$$A_{\text{losango}} = \frac{Dd}{2}$$

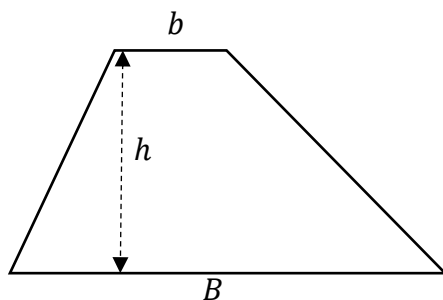
$$A_{\text{losango}} = \frac{14 \cdot 9}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = 63 \text{ m}^2$$

Gabarito: LETRA E.



Trapézio

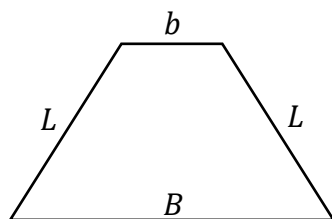


$$\text{ÁREA} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

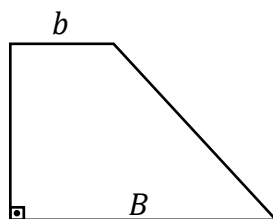
Características Principais:

- "B" representa a medida da base maior, "b" é a medida da base menor;
- As bases são paralelas;
- "h" é a altura do trapézio.

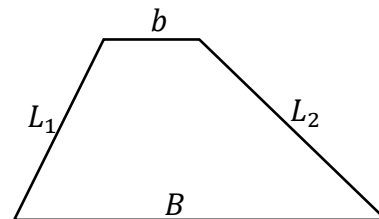
Tipos de Trapézios:



Trapézio Isósceles



Trapézio Retângulo



Trapézio Escaleno

- **Trapézio Isósceles:** Os lados não paralelos possuem a mesma medida. Além disso, são simétricos.
- **Trapézio Retângulo:** Um dos lados não paralelos faz um ângulo de 90° com as bases.
- **Trapézio Escaleno:** É o trapézio que apresenta todos os seus lados distintos.



(PREF. CAUCAIA/2023) Guilherme possui um terreno trapezoidal com as seguintes medidas: 28 m de base maior, 22 m de base menor e 15 m de distância entre as bases. Dessa forma, o valor da área desse trapézio é

- A) 100 m².
- B) 250 m².
- C) 375 m².
- D) 550 m².
- E) 750 m².



Comentários:

Galera, mais uma questão para aplicarmos **fórmula**! O enunciado deu todas as informações que precisamos.

- Base Maior (B) = 28 cm;
- Base Menor (b) = 22 cm;
- Altura (h) = 15 cm

Lembre-se da **fórmula**:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Agora, **substituindo** as informações:

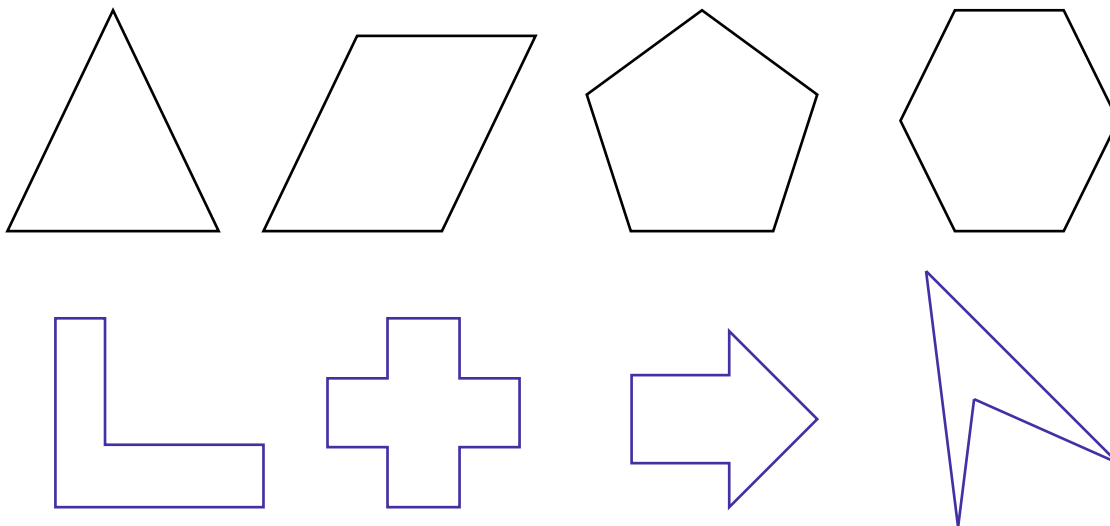
$$A = \frac{(28 + 22) \cdot 15}{2} \rightarrow A = \frac{50 \cdot 15}{2} \rightarrow A = 25 \cdot 15 \rightarrow \boxed{A = 375 \text{ cm}^2}$$

Gabarito: LETRA E.



Polígonos

Os triângulos e os quadriláteros que vimos nessa aula são polígonos. Simplificadamente, podemos chamar de polígono, **a figura geométrica plana e fechada formada pela união de segmentos de reta**. Confira abaixo.

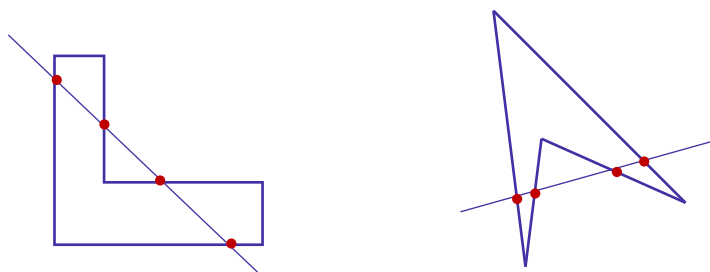


Na primeira linha da imagem acima estão **alguns polígonos que chamamos de convexos**. Eles vão ser chamados assim quando uma reta qualquer **cortar o polígono em apenas dois pontos**.



Polígonos Convexos

Observe que qualquer reta que usamos para cortar o polígono convexo, vai tocá-lo em apenas dois pontos! Essa é a característica que vai definir os polígonos convexos! Observe agora os **não convexos**:

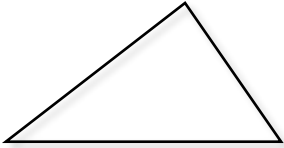
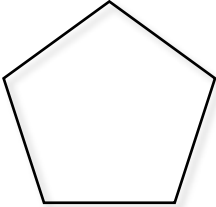
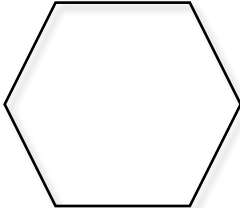
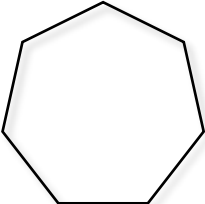


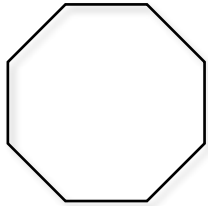
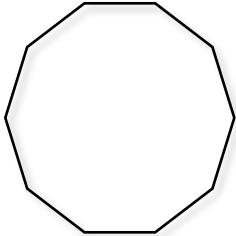
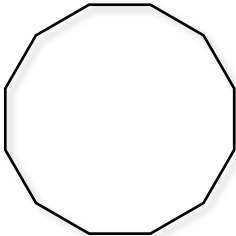
Polígonos Não Convexos



Por sua vez, **nos polígonos não convexos, existem retas que vão cortá-los em mais de dois pontos**. Veja que eles podem assumir as mais diferentes formas, sendo bem imprevisíveis e dificilmente estarão na sua prova. Quando caem, 99% das vezes é apenas para fazermos a identificação em convexo ou não.

Ademais, é importante sabermos que cada um dos polígonos recebe um nome diferente, a depender da quantidade de lados. Vamos conhecer os principais!

Polígono	Lados	Exemplo
Triângulo	3	
Quadrilátero	4	
Pentágono	5	
Hexágono	6	
Heptágono	7	

Octógono	8	
Decágono	10	
Dodecágono	12	

Outros polígonos que são importantes: eneágono (9 lados), undecágono (11 lados), pentadecágono (15) e o icoságono (20 lados).



(CM ILHA DE ITAMARACÁ/2023) Uma figura geométrica plana com 20 lados é chamada de:

- A) dodecágono.
- B) duodecágono.
- C) icoságono.
- D) bidecágono.
- E) undecágono.

Comentários:

Pessoal, adianto que as questões sempre falam do polígono de 20 lados. Não se esqueça! Ele se chama:

ICOSÁGONO

Gabarito: LETRA C.



Soma dos ângulos externos

Quero trazer para vocês um resultado que vimos para triângulos e quadriláteros, mas que na verdade serve para qualquer polígono.

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo será sempre 360° .

Soma dos ângulos internos

Ademais, a soma dos ângulos internos de um polígono de " n " lados é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Por exemplo, no triângulo temos três lados e, portanto, $n = 3$. Usando isso na fórmula acima,

$$S_i = (3 - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow S_i = 180^\circ$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , conforme vimos.

Analogamente, para os quadriláteros convexos, temos $n = 4$.

$$S = (4 - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow S_i = 2 \cdot 180^\circ \rightarrow S_i = 360^\circ$$

Assim, a soma dos ângulos internos nos quadriláteros convexos é 360° .

Viu só, moçada? Caso queira saber a soma dos ângulos internos em um hexágono, por exemplo, basta substituímos $n = 6$. **Às vezes, as bancas gostam de cobrar essa fórmula.**



(PREF. TUPANATINGA/2023) O termo “dodecágono”, derivado da palavra “dodekágonos”, é usado no campo da geometria para nomear um polígono que possui, como soma dos ângulos internos, o valor correspondente a 3.240 graus.

Comentários:

Pessoal, já sabemos que um **dodecágono é um polígono com 12 lados**. Sendo assim, a soma dos seus ângulos internos pode ser encontrada por meio da seguinte expressão:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$



Substituindo $n = 12$:

$$S_i = (12 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 10 \cdot 180^\circ$$

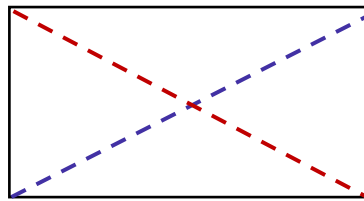
$$S_i = 1800^\circ$$

Observe que **a soma dos ângulos de um dodecágono** é bem menor do que a apontada no item. Sendo assim, o item está ERRADO.

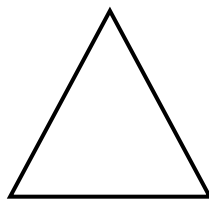
Gabarito: ERRADO.

Diagonais de um Polígono Convexo

As diagonais de um polígono são segmentos de retas que **unem vértices não adjacentes**. Calma, vou mostrar melhor o que isso significa!

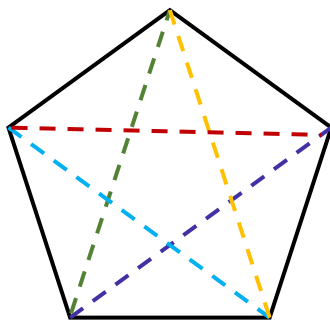


Observe o retângulo acima! Ele tem **duas diagonais**. Uma está marcada de roxo e outra de vermelho. Agora, veja o triângulo:



Por sua vez, o triângulo, apesar de ser um polígono convexo, **não possui diagonais**. O motivo disso é **que todos os seus vértices são adjacentes um do outro**. Dessa forma, não conseguimos traçar nenhuma diagonal. Agora, vamos ver o pentágono!





O pentágono já possui 5 diagonais! A pergunta que vem agora é: *Existe uma maneira de calcularmos a quantidade de diagonais sabendo o número de lados do polígono convexo?* A resposta é sim! Existe uma fórmula que nos fornece essa quantidade e as bancas estão começando a cobrá-la.



$$d = \frac{n(n - 3)}{2}$$

"d" representa a quantidade de diagonais e "n" é o número de lados do polígono.



(ISS-BH/2022) A partir do conceito: “Dado um polígono convexo qualquer, diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos”. Assim, um triângulo não possui diagonais, pois, como só possui três vértices, não é possível unir dois vértices não consecutivos, o quadrado possui duas diagonais e partir de um dos vértices, encontramos, apenas um outro vértice não consecutivo, enquanto, que no pentágono convexo temos 5 diagonais, e nesse polígono encontramos a partir de um vértice, dois outros vértices não consecutivos. A partir dessas informações, monta-se a tabela a seguir.

Nome do Polígono	Número de lados	Número de diagonais	A partir de um dos vértices, o número de vértices não consecutivos
Triângulo	3	0	0
Quadrado	4	2	1
Pentágono	5	5	2
Hexágono	6	9	3
Heptágono	7	14	4



Verifica-se que existe uma certa regularidade entre o número de lados, número de diagonais e o número de vértices não consecutivos contados a partir de um dos vértices. Então, o número de diagonais de um polígono convexo que possui 102 lados é igual a

- A) 4.852.
- B) 4.947.
- C) 4.998.
- D) 5.049.
- E) 5.100.

Comentários:

Pessoal, o **número de diagonais** de um polígono convexo de "n" lados é dado pela seguinte relação:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

O enunciado quer o número de diagonais de um polígono com **102 lados**. Assim,

$$d = \frac{102 \cdot (102 - 3)}{2} \rightarrow d = \frac{102 \cdot 99}{2} \rightarrow d = 51 \cdot 99 \rightarrow \boxed{d = 5.049}$$

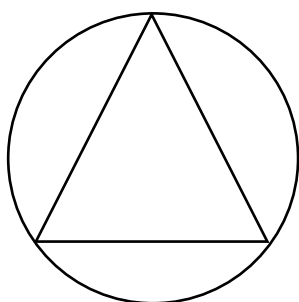
Gabarito: LETRA D.



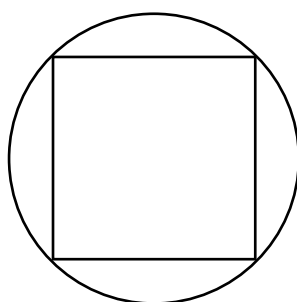
Inscrição e Circunscrição de Polígonos

Pessoal, esse tópico não é muito comum em cursos regulares. O motivo disso é que ele não traz uma teoria nova, mas sim uma aplicação específica de tudo que vimos. Como é um tipo de problema bastante comum nas provas, eu resolvi destacá-lo em um tópico a parte para que possamos trabalhá-lo com a devida atenção.

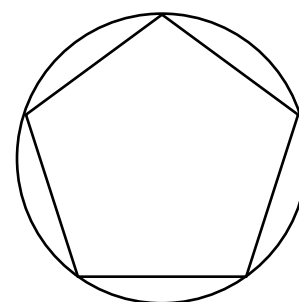
Indo direto ao ponto, nós falamos que um polígono está inscrito numa circunferência quando seus vértices são pontos que estão na circunferência. Nessa situação, teremos **o polígono dentro do círculo**. Observe.



(a) Triângulo **inscrito** na circunferência



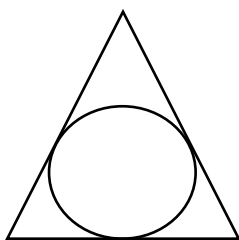
(b) Quadrado **inscrito** na circunferência



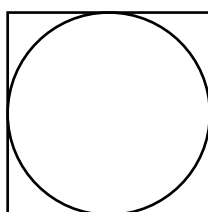
(c) Pentágono **inscrito** na circunferência

Na situação representada acima, também podemos dizer que **o círculo está circunscrito** aos polígonos.

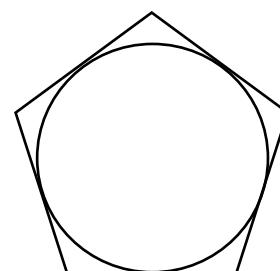
Por sua vez, um polígono é circunscrito, quando o círculo em seu interior tangencia todos os seus lados. Dessa forma, o polígono é externo ao círculo. Vamos visualizar.



(d) Triângulo **circunscrito** à circunferência



(e) Quadrado **circunscrito** à circunferência



(f) Pentágono **circunscrito** à circunferência

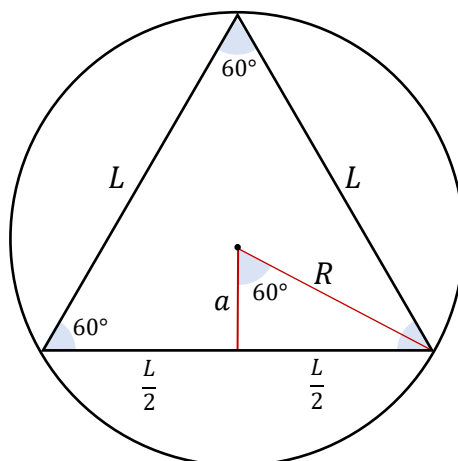
Na situação apresentada acima, também podemos dizer que **a circunferência está inscrita** em cada um dos polígonos. Por isso, muita atenção na forma que o enunciado da questão expõe o problema!

Exposta essa parte introdutória, agora vamos estudar com detalhes cada uma dessas situações considerando o triângulo, o quadrado e o hexágono. Para efeitos do nosso estudo, consideraremos apenas **polígonos regulares**, que são as situações preponderantes em prova. Vamos nessa?!



Triângulos

A primeira situação que estudaremos será o triângulo equilátero inscrito na circunferência. Vamos desenhá-la com todos os detalhes pertinentes.



Observe que destacamos alguns parâmetros importantes. "R" é o raio do círculo, "a" é o apótema e "L" é o lado do triângulo. O apótema nada mais é do que um **segmento de reta que liga o centro geométrico do polígono a um dos seus lados**, de forma **perpendicular**.

Você pode estar se perguntando onde queremos chegar com tudo isso. Nossa missão aqui será escrever "L" e "a" em função do raio da circunferência "R". Para isso, observe o triângulo retângulo destacado. Podemos usar o seno e cosseno de 60° para escrever as relações procuradas.

$$\sin 60^\circ = \frac{L/2}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{2R} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = R\sqrt{3}}$$

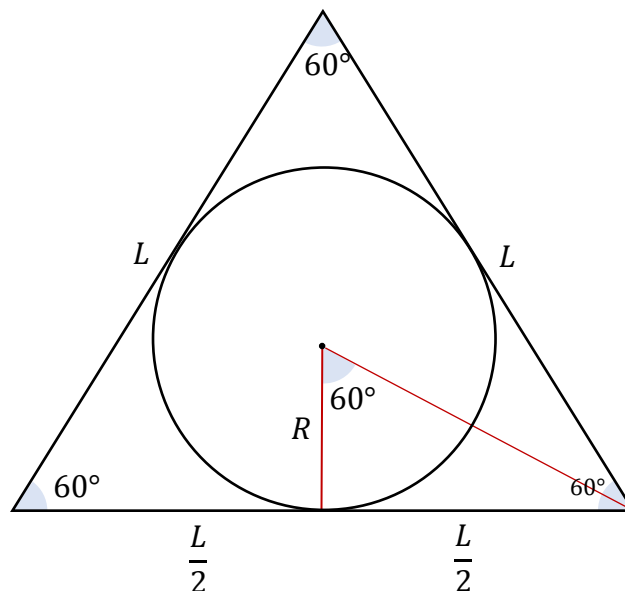
$$\cos 60^\circ = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{R}{2}}$$

Professor, eu vou precisar decorar esses resultados para a minha prova?

Pessoal, não precisa! A ideia aqui é que vocês **entendam e visualizem como chegar nesses resultados**. Dessa forma, caso caia alguma questão do gênero em seu concurso, você a resolverá muito mais rapidamente.

Por fim, também temos a situação em que **o triângulo está circunscrito à circunferência**. Também vamos desenhá-la com os detalhes pertinentes!





Como já falei, nosso objetivo em todas essas análises é escrever o lado e o apótema do polígono em função do raio da circunferência. Nessa situação específica, a primeira coisa que conseguimos observar é que o **apótema do triângulo é exatamente igual ao raio!**

$$\boxed{a = R}$$

Por sua vez, conseguimos usar a tangente de 60° para relacionar "R" e "L".

$$\tan 60^\circ = \frac{L/2}{R} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{L}{2R} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = 2\sqrt{3}R}$$

Feito tudo isso, vamos dar uma olhada em como isso pode cair na prova.

HORA DE PRATICAR!



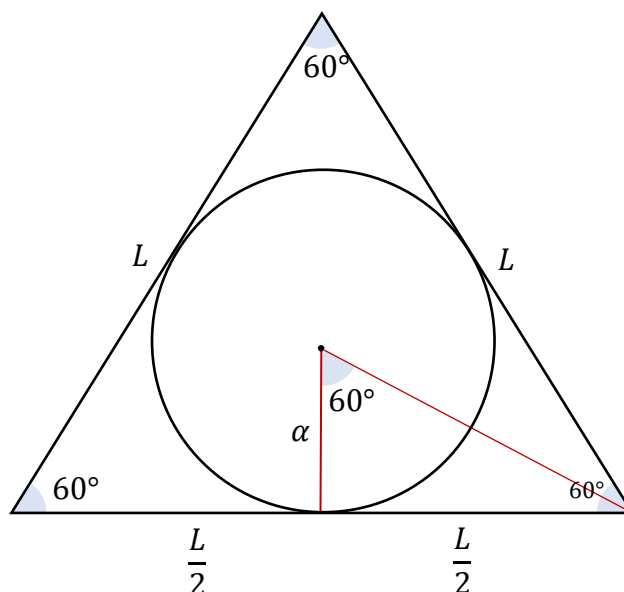
(PREF. B. DO RIBEIRO/2021) Um círculo inscrito em um triângulo equilátero tem raio α . Podemos afirmar que a área desse triângulo, função de α , é dada por:

- A) α^2
- B) $3\sqrt{3}\alpha^2$
- C) $\sqrt{3}\alpha$
- D) $\sqrt{3}\alpha^2$
- E) α



Comentários:

Opa! Temos um círculo inscrito em um triângulo equilátero. De uma outra forma, o enunciado poderia ter dito que **o triângulo está circunscrito ao círculo**. É a situação estudada anteriormente.



A única coisa que mudou é que a questão chama o raio da circunferência de α . Vimos podemos relacionar o lado do triângulo (L) com o raio (α) por meio da seguinte expressão:

$$L = 2\sqrt{3}\alpha$$

A questão pede a área do triângulo.

Você deve se lembrar que no tópico de Triângulos, aprendemos que **a área de um triângulo equilátero** pode ser calculada por meio da seguinte fórmula (muito importante):

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Pronto! Vamos substituir L e escrever essa expressão em função de α .

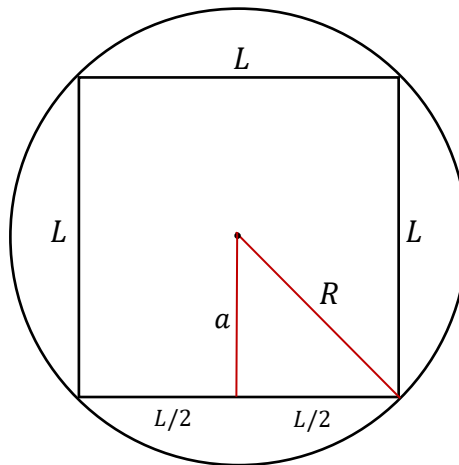
$$A = \frac{(2\sqrt{3}\alpha)^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow A = \frac{4 \cdot 3\alpha^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow \boxed{A = 3\sqrt{3}\alpha^2}$$

Gabarito: LETRA B.

Quadrados

Agora, vamos fazer a mesma coisa para os quadrados! Inicialmente, considere o quadrado inscrito na circunferência conforme abaixo:





Para cumprir nosso objetivo, visualize que o diâmetro do círculo é igual à diagonal do quadrado! Dessa forma, podemos escrever que:

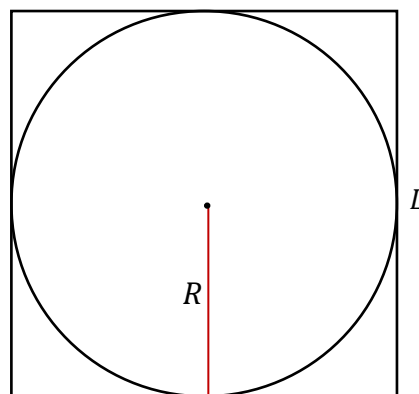
$$L\sqrt{2} = 2R \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \sqrt{2}R}$$

Com essa informação, vamos usar o Teorema de Pitágoras para determinar "a" em função de "R".

$$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad R^2 = \frac{R^2}{2} + a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{R^2}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{2}R}{2}}$$

É verdade que poderíamos obter esses resultados de diferentes formas! Lembro também que todo esse nosso trabalho visa prepará-lo para uma cobrança de alto nível. A missão é que você se sinta confiante em resolver esse tipo de problema caso eles apareçam em sua prova.

Agora, vamos estudar a situação em que o quadrado está circunscrito à circunferência! Na minha opinião, é o caso mais simples de todos!



Inicialmente, visualize que o raio coincide com o apótema!



$$a = R$$

Por fim, visualize que o diâmetro do círculo é exatamente igual ao lado do quadrado!

$$L = 2R$$

Observe que se desenharmos a figura corretamente, conseguimos retirar todas as relações apenas por meio da visualização. Não precisamos usar senos, cossenos, teorema de Pitágoras etc.

HORA DE PRATICAR!

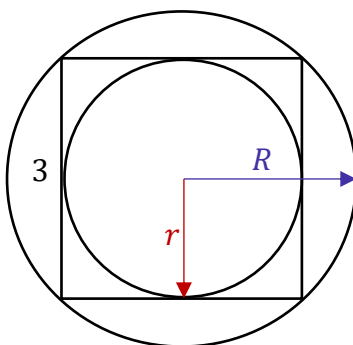


(UECE/2020) Um quadrado cuja medida do lado é 3 cm está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é R cm e circunscrito a uma circunferência cuja medida do raio é r cm. Nestas condições, a relação r/R é igual a:

- A) $\sqrt{2}/2$
- B) $\sqrt{3}/2$
- C) $\sqrt{2}/3$
- D) $\sqrt{3}/3$

Comentários:

Essa questão mistura as duas situações! Temos um mesmo quadrado inscrito e circunscrito.



Na situação em que **o quadrado está inscrito**, vimos que:

$$L = \sqrt{2}R \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{2}L}{2}$$

Por sua vez, na situação em que **o quadrado está circunscrito**, temos:

$$L = 2r \quad \rightarrow \quad r = \frac{L}{2}$$



A questão pede o valor da razão r/R :

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{2}L}{2}} \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

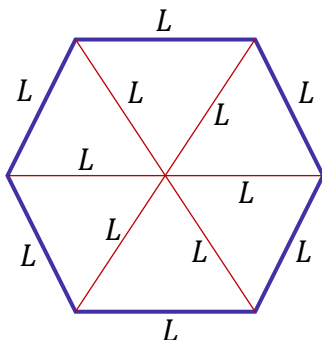
Observe que **em nenhum momento usamos o valor do lado do quadrado**. Afinal, quando fazemos a razão entre os dois raios, acabamos "cortando" o L .

Gabarito: LETRA A.

Hexágono

O último caso que veremos é o do hexágono. Cai bastante em prova, moçada! Muita atenção aqui.

Antes de começar a analisar os desenhos, quero revisar algumas coisas. A primeira delas é que um hexágono regular pode ser visto como a "**junção**" de 6 triângulos equiláteros.



Dessa forma, podemos dizer que a área de um hexágono regular é **6 vezes a área de um triângulo equilátero**.

$$A = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$$

TOME NOTA!



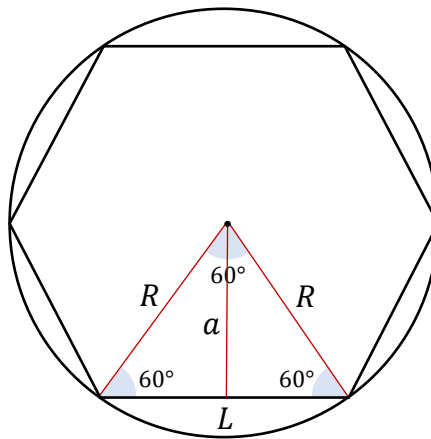
Área do Hexágono Regular

$$\boxed{A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}}$$



Ademais, é importante lembrar que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero são de 60° .

Dito tudo isso, vamos analisar a situação em que o hexágono está inscrito em uma circunferência.



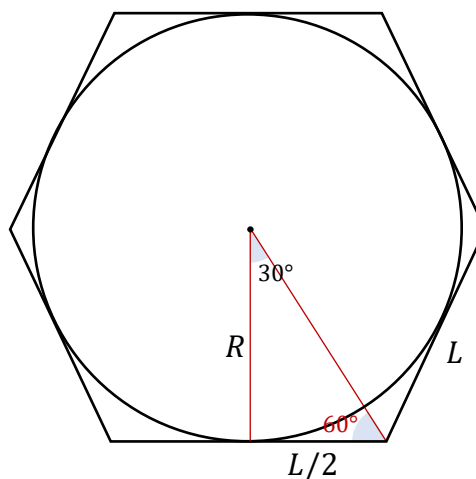
Observe que como o triângulo é equilátero, o raio só pode ser igual ao lado do hexágono. Assim:

$$\boxed{L = R}$$

Por sua vez, o apótema é igual a altura desse triângulo. Podemos encontrá-lo por meio do seno de 60° .

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{3}R}{2}}$$

Por fim, quando o hexágono está circunscrito à circunferência, temos a seguinte situação:



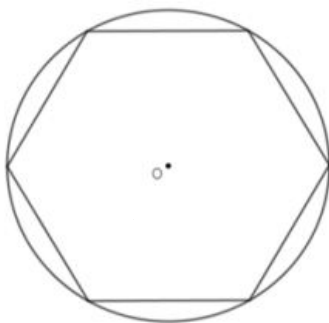
Para relacionarmos o lado "L" com o raio da circunferência "R", podemos usar a tangente de 60° .

$$\tan 60^\circ = \frac{R}{L/2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{2R}{L} \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}}$$

HORA DE PRATICAR!



(PREF. MARIANA/2022) Na figura a seguir, o hexágono regular está inscrito na circunferência de centro O.



A área do hexágono tem medida igual a $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Logo, a medida do raio da circunferência inscrita nesse hexágono, e de centro também O, é igual a

- A) 2 cm.
- B) 4 cm.
- C) $\sqrt{3}$ cm.
- D) $2\sqrt{3}$ cm.

Comentários:

Inicialmente, vamos usar a área do hexágono para encontrar o lado "L".

$$A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \rightarrow L^2 = 4 \rightarrow L = 2$$

Com o lado do hexágono, podemos encontrar o raio do círculo inscrito por meio de:

$$L = \frac{2\sqrt{3}R}{3} \rightarrow R = \frac{\sqrt{3}L}{2} \rightarrow R = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{3}}$$

Gabarito: LETRA C.

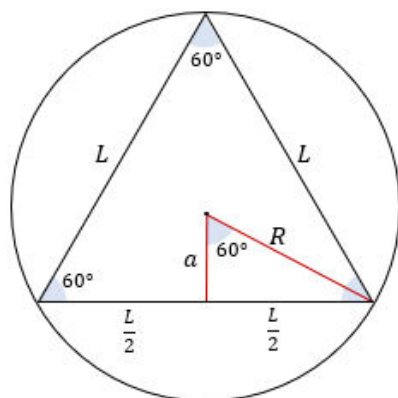
Pessoal, é verdade que podemos ter várias outras situações de polígonos inscritos ou circunscritos. No entanto, as mais frequentes com certeza foram trabalhadas aqui e você está preparado para enfrentá-las. Minha sugestão final para problemas assim é que você desenhe sempre e estabeleça as relações pertinentes por meio do uso da trigonometria! Para melhorar, vamos resumir todas as informações vistas nesse tópico.



RESUMINDO



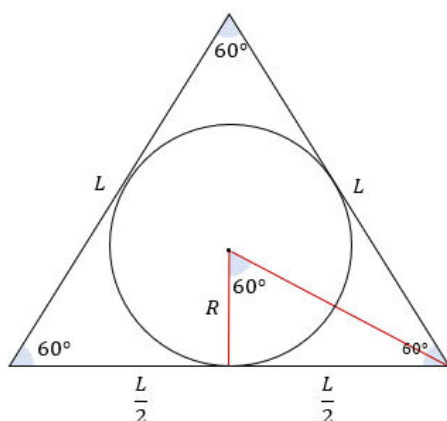
Inscrição e Circunscricção de Polígonos Regulares



**Triângulo equilátero
inscrito na circunferência**

$$L = R\sqrt{3}$$

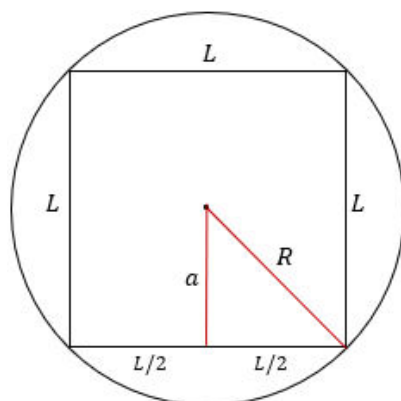
$$a = \frac{R}{2}$$



**Triângulo equilátero
circunscrito à circunferência**

$$L = 2\sqrt{3}R$$

$$a = R$$

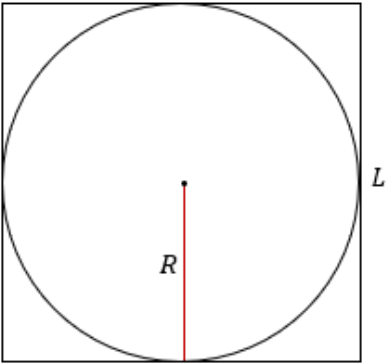
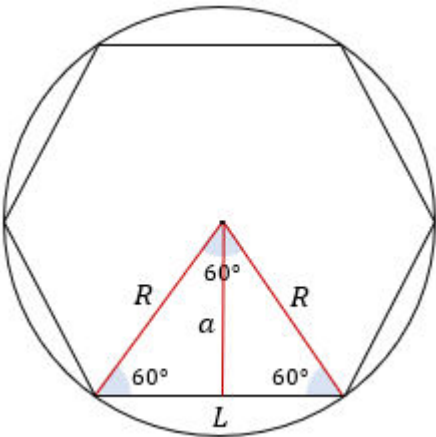
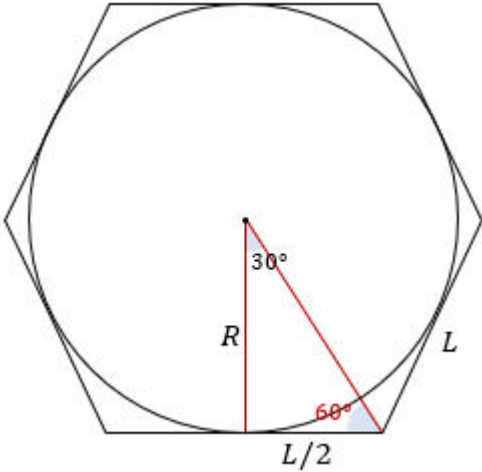


**Quadrado inscrito na
circunferência**

$$L = \sqrt{2}R$$

$$a = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$



	Quadrado circunscrito à circunferência $L = 2R$ $a = R$
	Hexágono regular inscrito na circunferência $L = R$ $a = \frac{\sqrt{3}R}{2}$
	Hexágono regular circunscrito à circunferência $L = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ $a = R$

QUESTÕES COMENTADAS

Introdução

Vunesp

1. (VUNESP/PREF. PRES. PRUDENTE/2022) A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é de $22^{\circ}44'$. A bissetriz do menor desses ângulos o divide em outros dois ângulos, cada um deles com medida de

- A) $14^{\circ}23'$
- B) $15^{\circ}17'$
- C) $15^{\circ}27'$
- D) $16^{\circ}49'$
- E) $16^{\circ}59'$

Comentários:

Para resolver esse exercício, precisamos saber a relação entre grau, minutos e segundos. Guarde que 1 grau tem 60 minutos e que 1 minuto tem 60 segundos. Dessa forma, podemos escrever:

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

Para representar os minutos, usamos a plica simples ('). Por sua vez, os segundos são representados por uma plica dupla ("). Muito cuidado para não confundir, pessoal. O "minuto" e o "segundo" que estamos vendo aqui não se referem a unidade de tempo. Na verdade, no contexto da aula de hoje, são unidades de medida angular. Dito isso, vamos para a questão propriamente dita.

O enunciado afirma que temos dois ângulos complementares. Vamos chamá-los de "x" e de "y".

$$x + y = 90^{\circ} \quad (1)$$

Lembre-se que dois ângulos são complementares quando sua soma é igual a 90° .

Por sua vez, o enunciado afirma que a diferença entre esses dois ângulos é igual a $22^{\circ}44'$.



Observe que temos um ângulo expresso em graus e em minutos. Na teoria, nós resolvemos uma questão em que trabalhamos com todas as unidades simultaneamente. Dessa vez, para apresentar-lhes uma outra forma de solução, **transformaremos tudo em uma unidade só**.

Inicialmente, vamos determinar quantos graus equivalem 44'. Para isso, basta dividir 44 por 60 (faça a regra de três: se 1 grau está para 60', então x graus está para 44').

$$\frac{44}{60} = 0,733...$$

Sendo assim, podemos escrever que:

$$44' = 0,73^\circ$$

Mais ainda:

$$22^\circ 44' = 22,73^\circ$$

Pronto, agora que temos tudo em graus, escrevemos:

$$x - y = 22,73^\circ \quad (2)$$

Temos um sistema formado pelas equações (1) e (2). Para resolvê-lo, podemos somar as duas equações.

$$(x + y) + (x - y) = 90^\circ + 22,73^\circ$$

$$2x = 112,73^\circ$$

$$x = 56,365^\circ$$

Devemos usar o valor de "x" em (1) ou (2) para determinarmos "y".

$$56,365^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 56,365^\circ$$

$$y = 33,635^\circ$$



Agora, perceba que a questão fala que existe uma bissetriz que divide esse ângulo em dois. Ora, **uma bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais**. Sendo assim, devemos dividir "y" por 2.

$$r = \frac{33,635^\circ}{2}$$

$$r = 16,81^\circ$$

No entanto, observe que as alternativas estão com as respostas em graus e minutos. Precisaremos transformar a parte decimal em minutos. Como dessa vez faremos **caminho inverso**, multiplicaremos por 60.

$$0,81 \cdot 60 = 48,6$$

Com isso:

$$0,81^\circ = 48,6' \cong 49'$$

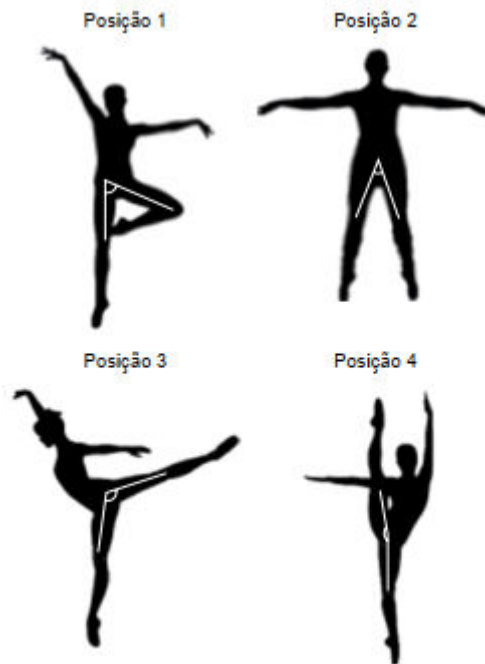
Nossa resposta fica:

$$16,81^\circ = 16^\circ 49'$$

Gabarito: LETRA D.

2. (VUNESP/PREF. F. VASCONCELOS/2018) As imagens a seguir apresentam algumas posições de dança. Destacado em branco está o ângulo correto das pernas para execução da posição.



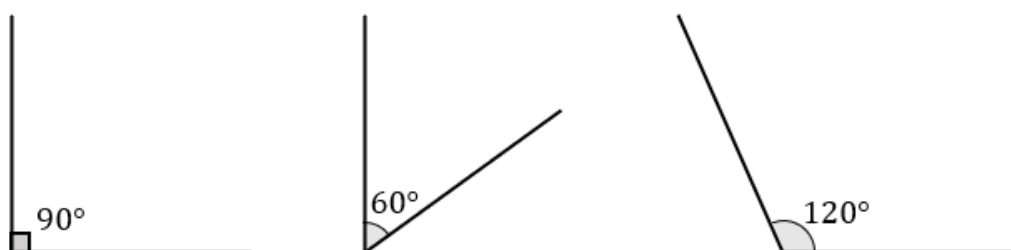


Dentre as posições apresentadas, as duas em que a angulação das pernas é superior à de um ângulo reto são as posições

- A) 1 e 2.
- B) 1 e 3.
- C) 2 e 3.
- D) 2 e 4.
- E) 3 e 4.

Comentários:

Pessoal, um ângulo reto é um ângulo de 90° . Como o enunciado pede as posições em que a angulação das pernas seja superior a 90° , estamos falando das posições de número 3 e de número 4. Observe a seguinte imagem para uma referência:



ÂNGULOS REPRESENTADOS EM GRAUS ($^\circ$)

Portanto, as posições 1 e 2 indicam ângulos agudos (menores que 90°), enquanto as posições 3 e 4 indicam ângulos obtusos (maiores que 90°).

Gabarito: LETRA E.

3. (VUNESP/SAP-SP/2013) Um arquiteto, em um de seus projetos, fez algumas medições e dentre elas mediu dois ângulos complementares. Um desses ângulos mediu 65° e o outro,

- A) 115° .
- B) 90° .
- C) 180° .
- D) 25° .
- E) 60° .

Comentários:

Ora, **dois são ângulos são complementares quando sua soma é igual a 90°** . Como um desses ângulos é 65° , podemos encontrar o outro por meio da seguinte equação:

$$65^\circ + x = 90^\circ$$

$$x = 90^\circ - 65^\circ$$

$$x = 25^\circ$$

Gabarito: LETRA D.

4. (VUNESP/FAPESP/2012) Sobre as medidas m e n , respectivamente dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$, sabe-se o seguinte: a soma delas é equivalente à medida de um ângulo raso e a diferença entre elas é equivalente à medida de um ângulo reto. Supondo-se o ângulo $\hat{M}$ com a maior medida, uma possível relação entre m e n é

- A) $m = 2n$.
- B) $m = 3n$.
- C) $m = 4n$.
- D) $m = 5n$.
- E) $m = 6n$.

Comentários:

Vamos lá! A soma de dois ângulos m e n é igual a medida de um **ângulo raso (180°)**. Com isso, escrevemos:

$$m + n = 180^\circ \quad (1)$$

Ademais, a diferença entre eles é igual a medida de um **ângulo reto (90°)**.



$$m - n = 90^\circ \quad (2)$$

Temos um sistema com duas equações e duas incógnitas. Para resolvê-lo, podemos somar as equações.

$$(m + n) + (m - n) = 180^\circ + 90^\circ$$

$$2m = 270^\circ$$

$$m = 135^\circ$$

Pronto! Com o valor de "m", encontramos "n".

$$135^\circ + n = 180^\circ$$

$$n = 180^\circ - 135^\circ$$

$$n = 45^\circ$$

Beleza! Para determinarmos uma relação entre "m" e "n", podemos dividir "m" por "n".

$$\frac{m}{n} = \frac{135}{45}$$

$$\frac{m}{n} = 3$$

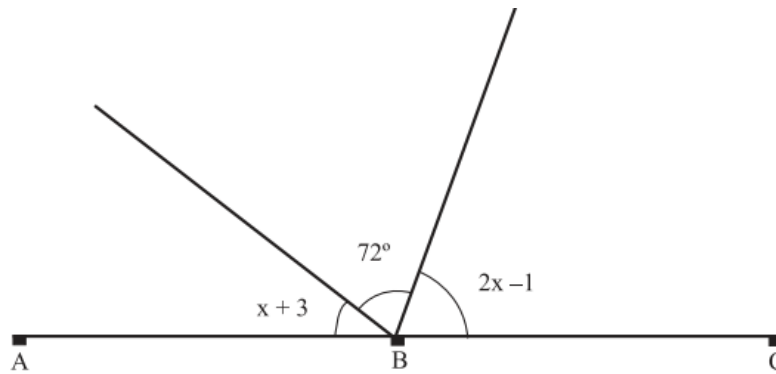
$$m = 3n$$

Com isso, podemos marcar a alternativa B.

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/SPPREV/2009) Na figura, os pontos A, B e C são colineares e B é vértice comum dos três ângulos em destaque.





Sabendo-se que as medidas desses ângulos estão indicadas em graus, conclui-se que o valor de x é igual a

- A) 30° .
- B) 32° .
- C) $35^\circ 20'$.
- D) $35^\circ 33'$.
- E) 36° .

Comentários:

Como A, B e C são colineares (estão sobre uma mesma reta), o ângulo formado por eles é um **ângulo raso**, ou seja, de 180° . Ao somar os ângulos destacados na imagem, devemos obter exatamente esse valor.

$$(x + 3) + 72^\circ + (2x - 1) = 180^\circ$$

$$3x + 74^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 106^\circ$$

$$x = 35,33^\circ$$

Observe que nenhuma das alternativas contempla esse valor. O motivo disso é que a resposta procurada está expressa em graus ($^\circ$) e em minutos ($'$). Sendo assim, transformamos o " x " multiplicando a **parte decimal 0,33 por 60**.

$$0,33 \cdot 60 = 20$$

Logo,

$$0,33^\circ = 20'$$



Dito isso, podemos escrever:

$$x = 35,33^\circ = 35^\circ 20'$$

Nossa resposta é a alternativa C.

Gabarito: LETRA C.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Circunferências

1. (VUNESP/PREF. JUNDIAÍ/2022) Miguel comprou uma lata de tinta spray com 200 mL, cujo rendimento total é de $3,0 \text{ m}^2$, e pretende usá-la para pintar a superfície circular da tampa de um poço, cujo raio mede $0,5 \text{ m}$. Assumindo a aproximação $\pi = 3$, depois de ter pintado a tampa do poço, a quantidade de tinta que ainda restará na lata de tinta spray corresponderá a

- A) 75 mL.
- B) 100 mL.
- C) 125 mL.
- D) 150 mL.
- E) 175 mL.

Comentários:

Como a tampa tem uma superfície circular, sua área é calculada por:

$$A = \pi R^2$$

Vamos usar as informações do enunciado: $R = 0,5 \text{ m}$ e $\pi = 3$.

$$A = 3 \cdot 0,5^2 \rightarrow A = 3 \cdot 0,25$$

$$A = 0,75 \text{ m}^2$$

Como o rendimento do spray é de $3,0 \text{ m}^2$, após pintar a superfície da tampa, ainda sobrá o suficiente para:

$$R = 3,0 - 0,75 \rightarrow R = 2,25 \text{ m}^2$$

Isso corresponde a:

$$\frac{2,25}{3,0} = 75\%$$

Ou seja, **ainda restará 75% de tinta na lata**. Em volume, ficamos com:

$$V = 75\% \cdot 200 \rightarrow \boxed{V = 150 \text{ mL}}$$

Gabarito: LETRA D.



2. (VUNESP/PREF. SOROCABA/2022) Uma região plana foi delimitada por circunferência cujo comprimento era de, aproximadamente, 157 m. A alternativa que mais se aproxima da área dessa região demarcada é

- A) 1920 m².
- B) 1930 m².
- C) 1940 m².
- D) 1950 m².
- E) 1960 m².

Comentários:

A questão forneceu o **comprimento da circunferência**. Com essa informação, podemos calcular o **raio**.

$$C = 2\pi R$$

$$157 = 2 \cdot 3,14 \cdot R$$

$$R = \frac{157}{6,28}$$

$$R = 25$$

Com o raio, podemos encontrar a área.

$$A = \pi R^2$$

$$A = 3,14 \cdot 25^2$$

$$A = 3,14 \cdot 625$$

$$A = 1962,5 \text{ m}^2$$

Queremos a alternativa que mais se aproxima desse resultado. Logo, nossa resposta é a A.

Gabarito: LETRA E.

3. (VUNESP/PREF. RIO CLARO/2022) Uma praça tem formato de círculo, com 20 m de diâmetro. A razão entre os valores numéricos correspondentes ao perímetro, em m, e à área, em m², dessa praça, é igual a

- A) 0,05.
- B) 0,10.
- C) 0,20.
- D) 5,0.



E) 10,0.

Comentários:

Como o diâmetro é de 20 metros, o raio é metade disso, ou seja, 10 metros.

Com o raio, conseguimos encontrar o **perímetro (comprimento)** e a **área**.

- Comprimento da Circunferência

$$C = 2\pi R$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 10$$

$$C = 62,8 \text{ m}$$

- Área da Circunferência

$$A = \pi R^2$$

$$A = 3,14 \cdot 10^2$$

$$A = 3,14 \cdot 100$$

$$A = 314 \text{ m}^2$$

Pronto. A razão (k) entre esses valores é:

$$k = \frac{C}{A} \quad \rightarrow \quad k = \frac{62,8}{314} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 0,2}$$

Gabarito: LETRA C.

4. (VUNESP/PM-SP/2019) Utilizando-se para π o valor aproximado de 3,14, o perímetro de uma região plana em forma de círculo é de aproximadamente 63 m. Dessa forma, das alternativas a seguir, a que apresenta o valor mais aproximado para a área dessa região, em metros quadrados, é

- A) 305.
- B) 315.
- C) 325.
- D) 335.
- E) 345.

Comentários:



A questão forneceu o **comprimento da circunferência**. Com essa informação, podemos calcular **o raio**.

$$C = 2\pi R$$

$$63 = 2 \cdot 3,14 \cdot R$$

$$R = \frac{63}{6,28}$$

$$R \cong 10 \text{ m}$$

Com o raio, podemos encontrar a área.

$$A = \pi R^2$$

$$A = 3,14 \cdot 10^2$$

$$A = 3,14 \cdot 100$$

$$\boxed{A = 314 \text{ m}^2}$$

Queremos a alternativa que **mais se aproxima** desse resultado. Logo, nossa resposta é a B.

Gabarito: LETRA B.

5. (VUNESP/PM-SP/2015) Ontem, três atletas realizaram seus treinamentos percorrendo distâncias diferentes sobre uma pista circular de 300 m de diâmetro. Sabe-se que Nivaldo percorreu 2,7 km a menos que Murilo e 1,8 km a mais que Ramiro, e que, juntos, eles deram um total de 37 voltas completas nessa pista. Usando a aproximação $\pi = 3$, é correto afirmar que a distância em quilômetros percorrida por Murilo no treinamento de ontem foi

- A) 15,6.
- B) 13,5.
- C) 12,6.
- D) 11,7.
- E) 10,8.

Comentários:

Como a pista circular tem 300 metros, o **raio** dessa pista é metade desse valor, ou seja, **150 metros**.

$$R = 150 \text{ m}$$



Com o raio dessa pista, podemos encontrar o comprimento.

$$C = 2\pi R$$

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$C = 2 \cdot 3 \cdot 150$$

$$C = 900 \text{ m}$$

Se os atletas deram **37 voltas completas**, a distância total (d) percorrida foi:

$$d = 37 \cdot 900$$

$$d = 33300 \text{ m} = 33,3 \text{ km}$$

Seja "N" a distância percorrida por Nivaldo, "M" a por Murilo e "R" a por Ramiro. Com isso, podemos escrever

$$N + M + R = 33,3 \quad (1)$$

Como Nivaldo percorreu **2,7 km a menos que Murilo**:

$$N = M - 2,7 \quad (2)$$

Como Nivaldo percorreu **1,8 km a mais que Ramiro**:

$$N = R + 1,8 \quad (3)$$

Temos três equações e três incógnitas, vamos resolver esse sistema.

Igualando (2) e (3):

$$M - 2,7 = R + 1,8$$

$$R = M - 4,5 \quad (4)$$

Usando (2) em (1):

$$(M - 2,7) + M + R = 33,3$$

$$2M + R = 36 \quad (5)$$



Usando (4) em (5):

$$2M + (M - 4,5) = 36$$

$$3M - 4,5 = 36$$

$$3M = 40,5$$

$$M = \frac{40,5}{3}$$

$$\boxed{M = 13,5 \text{ km}}$$

Sendo assim, podemos confirmar que **Murilo** percorreu **13,5 km** no seu treinamento.

Gabarito: LETRA B.

6. (VUNESP/CMBP/2013) O diâmetro de uma bola de boliche é de 16 cm. Supondo que uma dessas bolas, ao ser arremessada, role, sem deslizar, pela pista de 20 m de extensão, o número de voltas que ela completará, em torno de si mesma, ao final do percurso, é mais próximo de

- A) 30.
- B) 35.
- C) 40.
- D) 45.
- E) 50.

Comentários:

O diâmetro da bola é de 16 centímetros. Sendo assim, seu **raio é igual a 8 cm**.

$$R = 8 \text{ cm}$$

Com o raio, podemos encontrar o **comprimento da circunferência**.

$$C = 2\pi R$$

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 8$$

$$C = 50,24 \text{ cm}$$



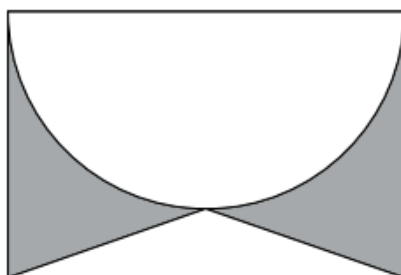
Como a pista tem 20 metros (2000 cm), para descobrir quantas voltas a bola completará, devemos **dividir o comprimento da pista pelo comprimento da circunferência**.

$$n = \frac{2000}{50,24} \rightarrow \boxed{n = 39,8}$$

Observe que o número de voltas é **bem próximo de 40**. Com isso, marcamos a letra C.

Gabarito: LETRA C.

7. (VUNESP/COREN-SP/2013) O retângulo da figura tem lados de medidas 6 cm e 4 cm. A semicircunferência tem como diâmetro um lado de 6 cm do retângulo. O triângulo é isósceles e tem vértices nas extremidades de um dos lados do retângulo e sobre a circunferência, conforme a figura.

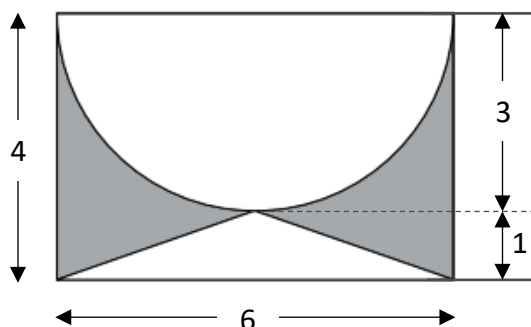


A área da região sombreada, em cm², vale

- A) $21 - 4,5\pi$
- B) $6 + 1,6\pi$
- C) $22 - 5,5\pi$
- D) $6 + 0,5\pi$
- E) $24 - 6,5\pi$

Comentários:

Nossa estratégia será a seguinte: encontrar a área da semicircunferência e a área do triângulo. A área da região sombreada será a área do retângulo **menos essas duas áreas**. Para encontrar todas essas áreas, vamos esquematizar o desenho com as informações do enunciado.



Note que **a área do semicírculo** (A_{sc}) é metade da área do círculo. O **raio do círculo** em questão é igual a 3.

$$A_{sc} = \frac{\pi R^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_{sc} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \quad \rightarrow \quad A_{sc} = 4,5\pi$$

Por sua vez, **a área do triângulo** (veremos com mais detalhes no próximo tópico) é dada por:

$$A_t = \frac{bh}{2}$$

b é a base do triângulo e h é a altura. Com isso:

$$A_t = \frac{6 \cdot 1}{2} \quad \rightarrow \quad A_t = 3$$

Por fim, **a área do retângulo** (veremos com mais detalhes no tópico 4) é dada por:

$$A_r = bh$$

b é a base do retângulo e h é a altura. Assim:

$$A_r = 6 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad A_r = 24$$

A área da **região sombreada** é dada por:

$$A = A_r - A_{sc} - A_t$$

$$A = 24 - 4,5\pi - 3$$

$$\boxed{A = 21 - 4,5\pi}$$

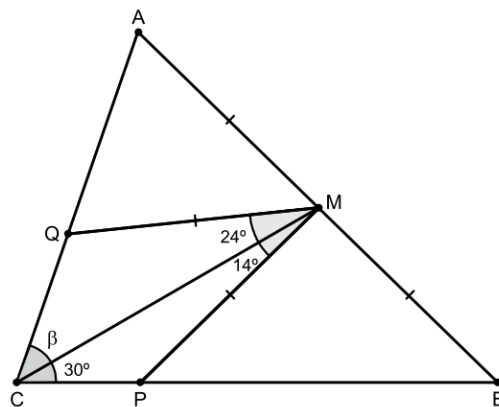
Gabarito: LETRA A.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Triângulos

1. (VUNESP/ISS-SANTO ANDRÉ/2024) Em um triângulo ABC, o ponto M divide o lado AB em duas partes de mesma medida, e os pontos P e Q estão sobre os lados desse triângulo, de modo que $MP = MQ = MA$, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo β é

- A) 38° .
- B) 39° .
- C) 40° .
- D) 41° .
- E) 42° .

Comentários:

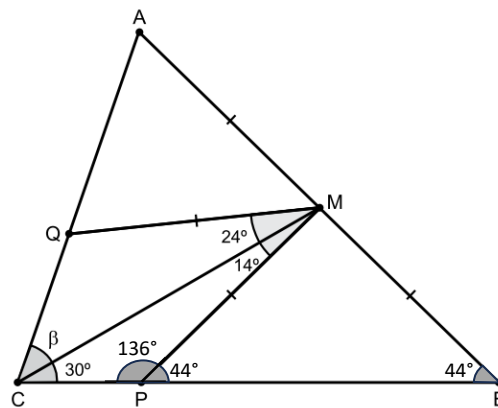
Vamos começar pelo **triângulo CMP**. Temos dois ângulos dele, podemos encontrar o terceiro, pois sabemos que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°** . Dito isso:

$$30^\circ + 14^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 136^\circ$$

O suplementar de 136° é 44° . Vamos colocar essas informações no desenho.





Observe que como **o triângulo MPB é isósceles**, podemos copiar o ângulo de 44° para $M\hat{B}P$.

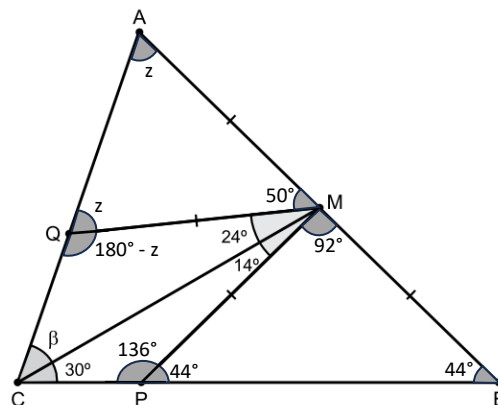
Agora, ficou faltando mais um ângulo para o triângulo MPB. Vamos usar novamente o fato de que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°** .

$$44^\circ + 44^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 88^\circ$$

$$y = 92^\circ$$

Vamos avançar um pouco no desenho:



Conseguimos determinar "z" por meio dos ângulos do triângulo AQM.

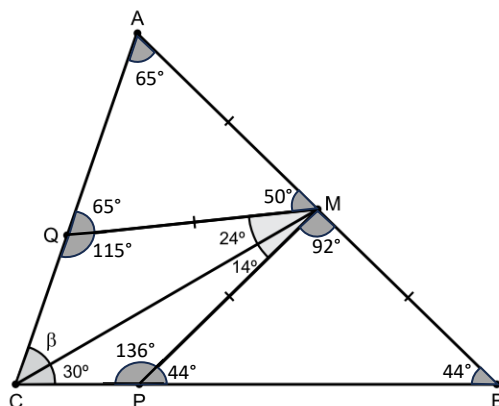
$$z + z + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2z = 130$$



$$z = 65^\circ$$

Com z , vamos novamente para o desenho:



Observe que sabemos que **a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a 180°** . Com isso:

$$(\beta + 30^\circ) + 65^\circ + 44^\circ = 180^\circ$$

$$\beta + 139^\circ = 180^\circ$$

$$\boxed{\beta = 41^\circ}$$

Gabarito: LETRA D.

2. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de

- A) 81 cm
- B) 82 cm
- C) 83 cm
- D) 84 cm
- E) 85 cm

Comentários:

Moçada, o maior lado de um triângulo retângulo é a hipotenusa. Sendo assim, a medida de **37 cm corresponde à medida da hipotenusa**. Por sua vez, o **12 cm é um dos catetos**. Com essas duas informações, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar o outro cateto.

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 37^2 = 12^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1369 - 144 \quad \rightarrow \quad b^2 = 1225$$

$$\boxed{b = 35 \text{ cm}}$$

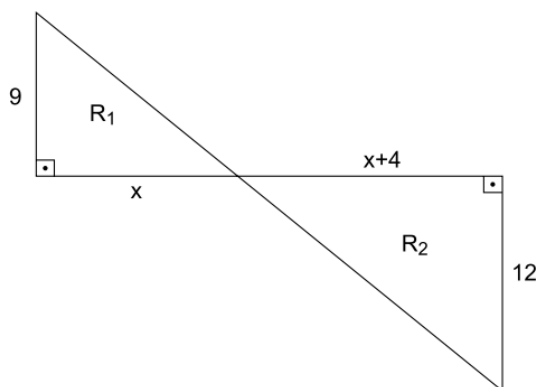


Pronto, temos todos os lados do triângulo. Para determinar o perímetro, temos que **somar todos eles**.

$$2p = h + a + b \rightarrow 2p = 37 + 35 + 12 \rightarrow \boxed{2p = 84 \text{ cm}}$$

Gabarito: LETRA D.

3. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2 , ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.

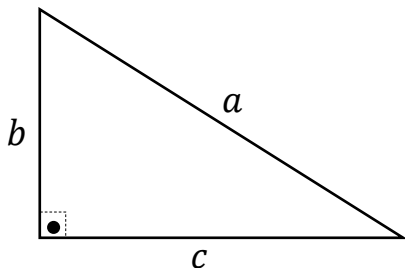


Se a área de R_1 é 54 m^2 , então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a

- A) 40.
- B) 42.
- C) 54.
- D) 48.
- E) 36.

Comentários:

Pessoal, temos dois triângulos retângulos. Na teoria, vimos que a área do triângulo retângulo é calculada da seguinte forma:



$$A_T = \frac{bc}{2}$$



Note que **os catetos de R_1 são "9" e "x"**. Além disso, sabemos **que a área de R_1 é 54 cm^2** . Com isso,

$$\frac{9x}{2} = 54 \rightarrow 9x = 108 \rightarrow x = \frac{108}{9} \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Com o valor de "x", podemos concluir que o cateto " $x + 4$ " de R_2 vale, na verdade, 16 cm.

- A questão pede o perímetro de R_2 , ou seja, **a soma de todos os lados do triângulo**. Note que ainda não sabemos a hipotenusa. Para encontrá-la, vamos usar o teorema de Pitágoras.

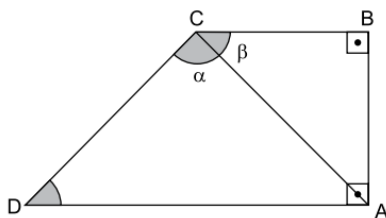
$$H^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow H^2 = 256 + 144 \rightarrow H^2 = 400 \rightarrow H = 20 \text{ cm}$$

Pronto! **Temos a hipotenusa e os dois catetos de R_2** . Para obter o perímetro, basta somarmos tudo!

$$\text{Perímetro de } R_2 = 20 + 16 + 12 \rightarrow \text{Perímetro de } R_2 = 48 \text{ cm}$$

Gabarito: LETRA D.

4. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



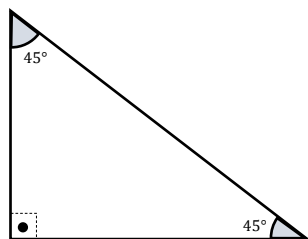
Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

- A) 125° .
- B) 115° .
- C) 110° .
- D) 135° .
- E) 130° .

Comentários:

Em um triângulo retângulo, teremos um ângulo reto (90°). Quando ele é isóscele, os outros ângulos serão iguais a 45° , conforme mostra a figura abaixo.





Qual o motivo disso? Vamos lá! Lembre-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° .

$$a + b + c = 180^\circ$$

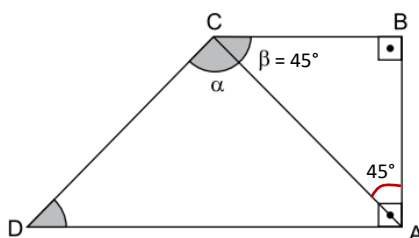
- Quando o triângulo é retângulo, **um dos ângulos é igual a 90°** . Vamos dizer que seja "a". Logo,

$$90^\circ + b + c = 180^\circ \rightarrow b + c = 90^\circ$$

- Quando o triângulo é isóscele, **ele possui dois ângulos iguais**. Portanto, $b = c = x$.

$$x + x = 90^\circ \rightarrow 2x = 90^\circ \rightarrow x = 45^\circ$$

Assim, em um triângulo retângulo isósceles, sempre **teremos um ângulo de 90° e outros dois de 45°** . Agora, vamos para a questão em si. De acordo com o enunciado, tínhamos **um trapézio que foi dividido em dois triângulos retângulos isósceles**. Sendo assim, vamos olhar atentamente para a figura dada no enunciado.



Observe que **ABC é um dos triângulos retângulos**. Se já temos o ângulo de 90° em B, então os demais serão de 45° , já que é um triângulo retângulo isósceles. Com isso, já podemos dizer que **$\beta = 45^\circ$** . Falta determinarmos α . Como **DCA é outro triângulo retângulo isósceles**, então α mede 90° ou 45° . Para decidir qual dos dois é o valor de α , podemos ir por tentativa, para ganhar velocidade.

Se α fosse 45° , a soma de α e β seria 90° . **Não há alternativa com esse valor**. Consequentemente, α não pode ser 45° e **o único valor que sobra para ele é 90°** . Com isso,

$$\alpha + \beta = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Gabarito: LETRA D.

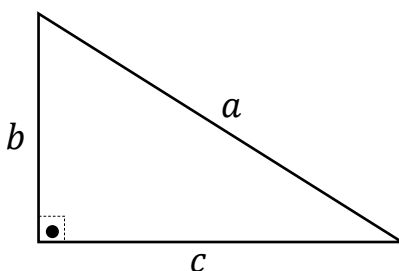


5. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) De um terreno no formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 25 metros e 15 metros, respectivamente. A medida do terceiro lado desse terreno é igual a

- A) 19,5 metros.
- B) 20,0 metros.
- C) 20,5 metros.
- D) 21,0 metros.
- E) 21,5 metros.

Comentários:

Galera, a questão falou de triângulo retângulo. Quando isso acontecer, lembre-se da seguinte imagem:



- O lado de comprimento "**a**" é chamado de **hipotenusa** e é o maior lado do triângulo retângulo.
- Os lados de comprimento "**b**" e "**c**" são chamados de **catetos**.

Esses três comprimentos se relacionam por meio do Teorema de Pitágoras que diz: "**o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos**".

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como o enunciado disse que **o maior lado mede 25 metros**, então já temos o valor da hipotenusa.

$$a = 25$$

Por sua vez, **o menor lado mede 15 metros**. Ele é um dos catetos, vamos dizer que seja b.

$$b = 15$$

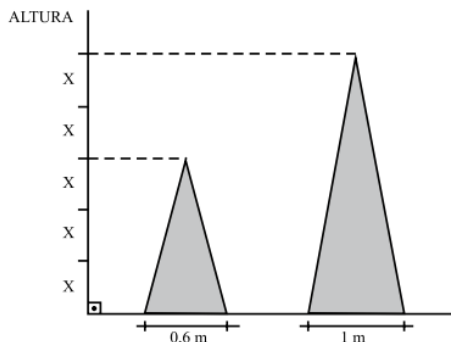
Com essas duas medidas, podemos achar a terceira **usando o Teorema de Pitágoras**.

$$25^2 = 15^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 625 - 225 \quad \rightarrow \quad c^2 = 400 \quad \rightarrow \quad c = 20 \text{ metros}$$

Gabarito: LETRA B.



6. (VUNESP/TJ-SP/2011) A figura compara as alturas, medidas em metros, de dois painéis decorativos triangulares, fixados em uma parede, que simulam árvores de Natal. Sabendo-se que a soma das medidas das alturas dos dois painéis é igual a 4 m, e que em cada painel foram instaladas 200 lampadzinhas coloridas por metro quadrado, pode-se concluir que o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura foi igual a



- A) 200.
- B) 250.
- C) 275.
- D) 300.

Comentários:

Olhando para a figura, vemos que o **painel menor** tem altura de "3x", enquanto o **painel maior** tem altura de "5x". Como o enunciado disse que a soma dessas alturas é 4 metros, podemos equacionar:

$$3x + 5x = 4 \rightarrow 8x = 4 \rightarrow x = 0,5 \text{ m}$$

Assim, cada "x" na figura equivale a 0,5 metros.

- Se o **painel menor** tem altura igual a "3x", quando substituímos o valor de "x" ficamos com:

$$\text{Altura do Painel Menor} = 3 \cdot 0,5 \rightarrow \text{Altura do Painel Menor} = 1,5 \text{ m}$$

- Se o **painel maior** tem altura igual a "5x", quando substituímos o valor de "x" ficamos com:

$$\text{Altura do Painel Maior} = 5 \cdot 0,5 \rightarrow \text{Altura do Painel Maior} = 2,5 \text{ m}$$

Para encontrar o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura, precisamos encontrar sua área.

- A **base é igual a 1 m** e a **altura é 2,5 m**. Assim,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A = \frac{1 \cdot 2,5}{2} \rightarrow A = 1,25 \text{ m}^2$$

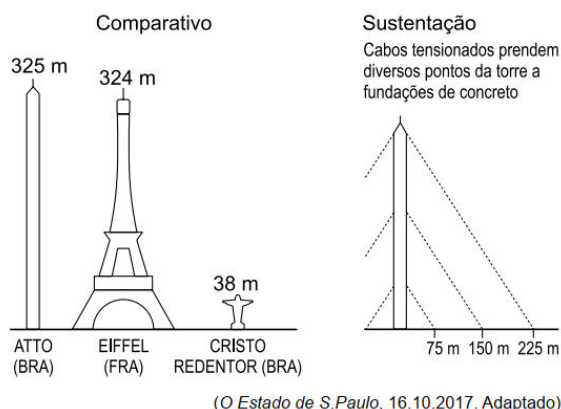


- Como o enunciado falou que **200 lâmpadas por metro quadrado**, basta multiplicarmos os dois valores.

$$Total\ de\ Lâmpadas = 200 \cdot 1,25 \rightarrow \text{Total de Lâmpadas} = 250$$

Gabarito: LETRA B.

7. (VUNESP/TJ-SP/2018) Inaugurado em agosto de 2015, o Observatório da Torre Alta da Amazônia (Atto, em inglês) é um projeto binacional Brasil-Alemanha que busca entender o papel da Amazônia no clima do planeta e os efeitos das mudanças climáticas no funcionamento da floresta. Construída numa região de mata preservada, dentro da Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uamatã, a torre Atto tem 325 m de altura e é a maior estrutura de pesquisa desse tipo em florestas tropicais no mundo.



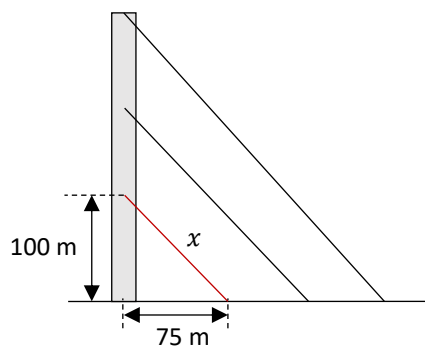
Considere a torre posicionada perpendicularmente ao solo e admita que o cabo tensionado fixado no solo a uma distância de 75 m da base da torre esteja preso à torre em um determinado ponto, cuja altura, em relação ao solo, seja igual a 100 m. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento desse cabo é igual a

- A) 110 m.
- B) 125 m.
- C) 135 m.
- D) 150 m.
- E) 130 m.

Comentários:

Vamos esquematizar a situação.



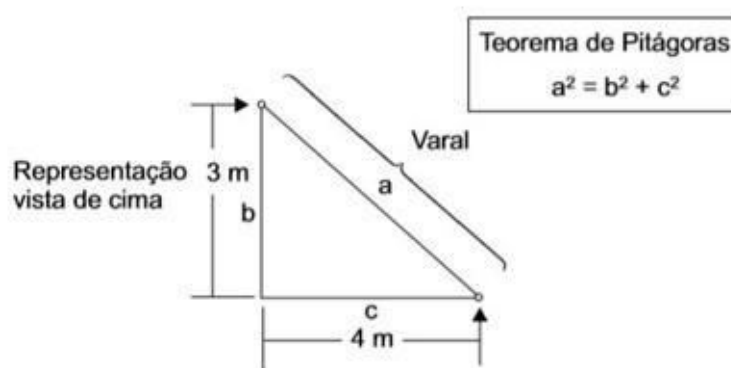


Note que o comprimento do cabo é exatamente a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais a 100 e 75. Com isso, podemos usar o teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 100^2 + 75^2 \rightarrow x^2 = 10000 + 5625 \rightarrow x^2 = 15625 \rightarrow x = 125 \text{ m}$$

Gabarito: LETRA B.

8. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Murilo vai colocar um varal em seu quintal. Ele já colocou os ganchos em duas paredes perpendiculares, conforme indicado pelas setas da imagem a seguir, de acordo com as distâncias marcadas.



Murilo utilizou o teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento de corda de varal que ele terá disponível para colocar suas roupas. Sabendo-se que Murilo colocará o varal bem esticado, se calcular corretamente, descobrirá que terá de varal, em metros, o total de

- A) 5,0.
- B) 5,5.
- C) 6,0.
- D) 6,5.
- E) 7,0.

Comentários:

A questão pede uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras e até forneceu a fórmula! Observe que o comprimento do varal é igual a hipotenusa do triângulo representado. Assim, vamos usar " $b = 3$ " e " $c = 4$ ".



$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow a^2 = 9 + 16 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

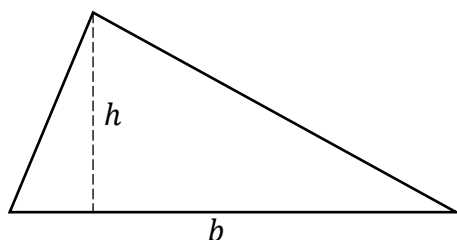
Gabarito: LETRA A.

9. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Mauro pretende fazer um cercado triangular em seu terreno de forma que este triângulo tenha a sua altura medindo dois terços da medida de sua base e que sua área seja de 75 m^2 . Então, a soma das medidas da base e da altura deste triângulo, expressas em metros, será igual a

- A) 20
- B) 22
- C) 25
- D) 28
- E) 30

Comentários:

Beleza, temos um triângulo. A questão não fala o tipo, então vamos considerar um genérico.



"h" representa a altura desse triângulo, enquanto "b" representa a base relativa a essa altura.

- Como **a altura possui 2/3 da medida da base**, então podemos escrever que:

$$h = \frac{2b}{3} \quad (1)$$

Lembre-se que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como a questão nos disse que **a área desse cercado triangular é igual a 75 m^2** , podemos substituir:

$$\frac{b \cdot h}{2} = 75 \rightarrow b \cdot h = 150$$



Usando o fato que $h = \frac{2b}{3}$, a expressão fica:

$$b \cdot \left(\frac{2b}{3}\right) = 150 \quad \rightarrow \quad b^2 = \frac{150 \cdot 3}{2} \quad \rightarrow \quad b^2 = 225 \quad \rightarrow \quad b = 15$$

Pronto, determinamos que **a base mede 15 metros**. Para achar a altura, substituímos o valor de b em (1).

$$h = \frac{2 \cdot 15}{3} \quad \rightarrow \quad h = 10$$

A questão pede a soma das medidas da base e da altura desse triângulo. Assim,

$$\text{Resposta} = 10 + 15 \quad \rightarrow \quad \text{Resposta} = 25$$

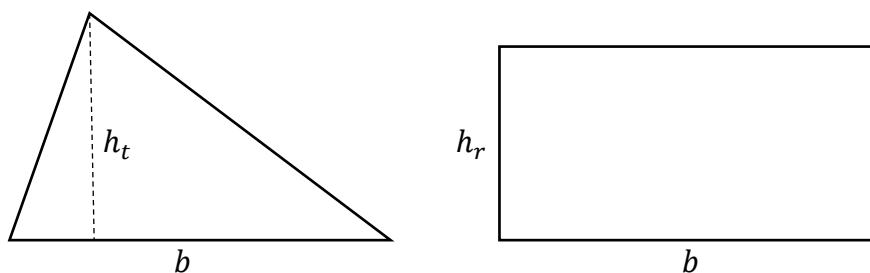
Gabarito: LETRA C.

10. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) Para que um triângulo e um retângulo de mesma base tenham áreas equivalentes, a altura do triângulo deve ser, em relação à altura do retângulo,

- A) 3 vezes maior.
- B) 3 vezes menor.
- C) a metade.
- D) o dobro.
- E) igual.

Comentários:

Vamos desenhar o triângulo e o retângulo, considerando que eles **possuem a mesma base** (conforme afirma o enunciado) e **alturas distintas**.



- Calculamos a área do triângulo da seguinte forma:

$$A_t = \frac{b \cdot h_t}{2}$$

- Por sua vez, a área do retângulo é apenas **o produto das duas dimensões**.

$$A_r = b \cdot h_r$$



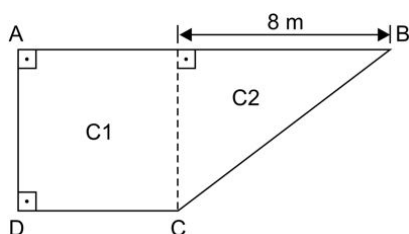
Como o enunciado disse que **essas duas áreas são equivalentes**, podemos igualá-las.

$$A_t = A_r \rightarrow \frac{b \cdot h_t}{2} = b \cdot h_r \rightarrow h_t = 2 \cdot h_r$$

Observe que a altura do triângulo **deve ser o dobro** da altura do retângulo para que as áreas sejam iguais.

Gabarito: LETRA B.

11. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) Um jardim ABCD é composto por um canteiro quadrado, C1, e um canteiro com a forma de um triângulo retângulo, C2, conforme mostra a figura.

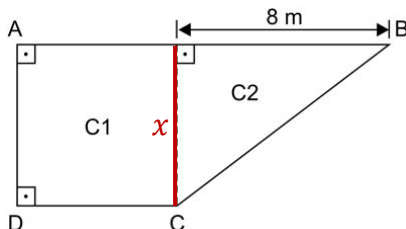


Se a área do canteiro C2 é 24 m^2 , então o perímetro do jardim ABCD é igual a

- A) 42 m.
- B) 40 m.
- C) 36 m.
- D) 30 m.
- E) 28 m.

Comentários:

Observe que o canteiro **C2 é um triângulo retângulo**. Sabemos que a área de um triângulo retângulo é a **metade do produto dos dois catetos**. Vamos olhar melhor para a figura.



Veja que **um dos catetos do triângulo é 8 e o outro é "x"**. Assim,

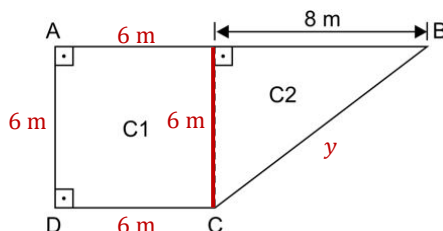
$$A_{C2} = \frac{8 \cdot x}{2} \rightarrow A_{C2} = 4x$$



Como o enunciado disse que **a área do canteiro é 24 m²**, podemos fazer:

$$4x = 24 \rightarrow x = 6 \text{ m}$$

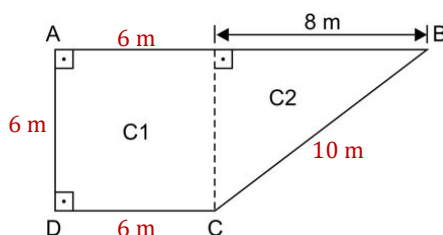
Note que esse "x" que acabamos de determinar **é a medida do lado do quadrado**. Logo,



Agora, vamos determinar "y". Note que **ele é a hipotenusa do triângulo retângulo**. Podemos usar o teorema de Pitágoras, já que sabemos os catetos.

$$y^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow y^2 = 36 + 64 \rightarrow y^2 = 100 \rightarrow y = 10$$

Para encontrarmos o perímetro, basta somarmos todos os lados do jardim ABCD.



$$P_{ABCD} = 6 + 6 + 6 + 8 + 10 \rightarrow P_{ABCD} = 36 \text{ m}^2$$

Gabarito: LETRA C.

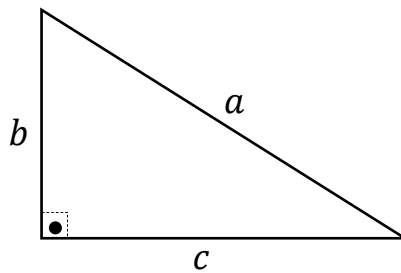
12. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) A respeito de um grande jardim com formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 13 e 5 metros. A medida, em metros, do terceiro lado desse jardim é igual a

- A) 10,5.
- B) 11.
- C) 11,5.
- D) 12.
- E) 12,5.

Comentários:



Temos um triângulo retângulo, vamos lembrá-lo:



- O lado de comprimento "**a**" é **chamado de hipotenusa** e é o maior lado do triângulo retângulo.
- Os lados de comprimento "**b**" e "**c**" são **chamados de catetos**.

Esses três comprimentos se relacionam por meio do Teorema de Pitágoras que diz: "**o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos**".

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como o enunciado disse que **o maior lado mede 13 metros**, então já temos o valor da hipotenusa.

$$a = 13$$

Por sua vez, **o menor lado mede 5 metros**. Ele é um dos catetos, vamos dizer que seja b.

$$b = 5$$

Com essas duas medidas, podemos achar a terceira **usando o Teorema de Pitágoras**.

$$13^2 = 5^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 169 - 25 \quad \rightarrow \quad c^2 = 144 \quad \rightarrow \quad c = 12 \text{ metros}$$

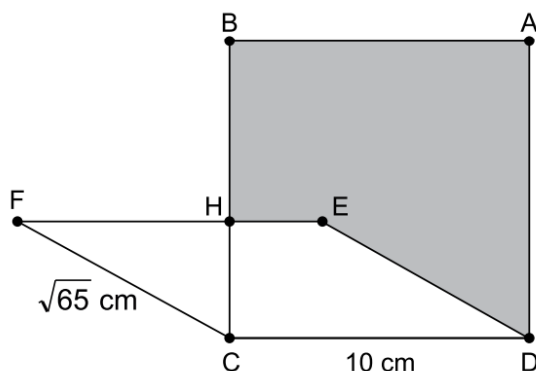
Gabarito: LETRA D.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Quadriláteros

1. (VUNESP/SBCPREV/2024) Um quadrado ABCD de lado 10 cm tem o lado CD em comum com o paralelogramo CDEF, de área 40 cm^2 . O lado EF do paralelogramo intersecta o lado BC do quadrado no ponto H, conforme mostra a figura a seguir.



Considerando o exposto, afirma-se com correção que a área do polígono ABHED é

- A) 62 cm^2 .
- B) 66 cm^2 .
- C) 70 cm^2 .
- D) 74 cm^2 .
- E) 78 cm^2 .

Comentários:

Para encontrar a área do polígono ABHED, vamos usar os seguintes passos:

- 1) Encontrar a área do quadrado ABCD.
- 2) Encontrar a área do triângulo retângulo FHC.
- 3) Encontrar a área do trapézio CDHE.

A área do polígono ABCD será a subtração da área do quadrado ABCD pela área do trapézio CDHE.

Dito isso, vamos começar!

- 1) A área do quadrado ABCD pode ser obtida por:

$$A_{ABCD} = a^2$$



Como a aresta do quadrado vale 10 cm:

$$A_{ABCD} = 10^2 \quad \rightarrow \quad A_{ABCD} = 100 \text{ cm}^2$$

2) Para encontrar a área do triângulo FHC, precisamos dos catetos. um dos catetos (CH) é a **altura do paralelogramo**. Logo, para encontrá-lo, fazemos:

$$\overline{CD} \cdot \overline{CH} = 40$$

$$10 \cdot \overline{CH} = 40$$

$$\overline{CH} = 4 \text{ cm}$$

Como temos a hipotenusa, podemos achar o outro cateto por meio do **Teorema de Pitágoras**.

$$\overline{CH}^2 + \overline{FH}^2 = \overline{FC}^2$$

$$4^2 + \overline{FH}^2 = (\sqrt{65})^2$$

$$16 + \overline{FH}^2 = 65$$

$$\overline{FH}^2 = 49$$

$$\overline{FH} = 7$$

Pronto! **Temos os dois catetos**. A área do triângulo FHC é dada por:

$$A_{FHC} = \frac{\overline{FH} \cdot \overline{CH}}{2} \quad \rightarrow \quad A_{FHC} = \frac{4 \cdot 7}{2} \quad \rightarrow \quad A_{FHC} = 14 \text{ cm}^2$$

3) A área do trapézio CDHE é encontrada por:

$$A_{CDHE} = A_{CDEF} - A_{FHC}$$

$$A_{CDHE} = 40 - 14$$

$$A_{CDHE} = 26 \text{ cm}^2$$

Por fim, encontramos a área do polígono por meio da subtração:



$$A_{ABHED} = A_{ABCD} - A_{CDHE}$$

$$A_{ABHED} = 100 - 26$$

$$A_{ABHED} = 74 \text{ cm}^2$$

Gabarito: LETRA D.

2. (VUNESP/CM-CAMPINAS/2024) Em um terreno retangular, com lados medindo 22 m e 31 m, será construído um pequeno galpão, também retangular, em que um lado tem 2 m a mais do que o outro, conforme representado na figura a seguir:

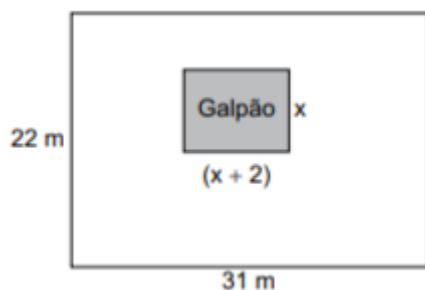


Figura fora de escala

Sabendo-se que, após a construção do galpão, o terreno deverá ter 619 m^2 de área livre, ou seja, sem considerar a área ocupada pelo galpão, o perímetro do galpão deverá ser de

- A) 26 m.
- B) 30 m.
- C) 28 m.
- D) 32 m.
- E) 34 m.

Comentários:

Inicialmente, note que o perímetro procurado do galpão é dado por:

$$P = 2x + 2(x + 2) = 4x + 4$$

Por sua vez, a **área do galpão** é dada por:

$$A = x(x + 2) = x^2 + 2x$$

A **área do terreno** é dada por:



$$T = 22 \cdot 31 \rightarrow T = 682 \text{ m}^2$$

Com as duas áreas e sabendo que **a área livre do terreno é 619 m²**, podemos escrever:

$$T - A = 619$$

$$682 - (x^2 + 2x) = 619$$

$$682 - x^2 - 2x = 619$$

Reorganizando:

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

Resolvendo essa **equação do segundo grau**, encontramos duas raízes: $x = -9$ ou $x = 7$.

Como a medida **x deve ser positiva**, descartamos a primeira raiz e ficamos com $x = 7$.

Ao substituir o valor de "x" na expressão que encontramos para **o perímetro**, ficamos com:

$$P = 4x + 4$$

$$P = 4 \cdot 7 + 4$$

$$P = 28 + 4$$

$$\boxed{P = 32}$$

Gabarito: LETRA D.

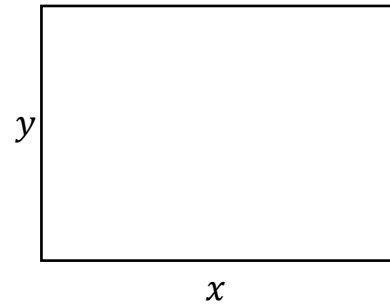
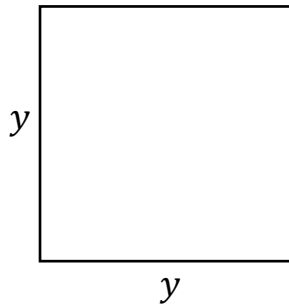
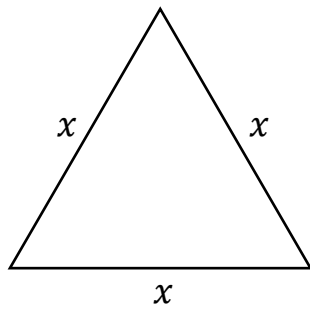
3. (VUNESP/SP-TRANS/2024) Considere x a medida, em cm, do lado de um triângulo equilátero e y a medida, também em cm, do lado de um quadrado Q. A soma dos perímetros desse triângulo e desse quadrado é igual a 45 cm. Se o perímetro de um retângulo de lados medindo x e y é igual a 26 cm, a área do quadrado Q é

- A) 16 cm².
- B) 25 cm².
- C) 36 cm².
- D) 49 cm².
- E) 64 cm².

Comentários:



Vamos desenhar **o triângulo, o quadrado e o retângulo**. Todos com suas respectivas medidas.



- **Perímetro do Triângulo (T)**

$$T = x + x + x \quad \rightarrow \quad T = 3x$$

- **Perímetro do Quadrado (Q)**

$$Q = y + y + y + y \quad \rightarrow \quad Q = 4y$$

- **Perímetro do Retângulo (R)**

$$R = y + x + y + x \quad \rightarrow \quad R = 2x + 2y$$

De acordo com o enunciado, **a soma do perímetro do triângulo com o do quadrado é 45 cm.**

$$T + Q = 45 \quad \rightarrow \quad 3x + 4y = 45 \quad (1)$$

Ademais, o enunciado fala que **o perímetro do retângulo é 26 cm.**

$$R = 26$$

$$2x + 2y = 26$$

$$x + y = 13 \quad (2)$$

Pronto. **Sistema de duas equações e duas incógnitas**. Vamos isolar o "x" em (2) e substituir em (1):

$$x = 13 - y$$

$$3 \cdot (13 - y) + 4y = 45$$



$$39 - 3y + 4y = 45$$

$$y = 45 - 39$$

$$y = 6$$

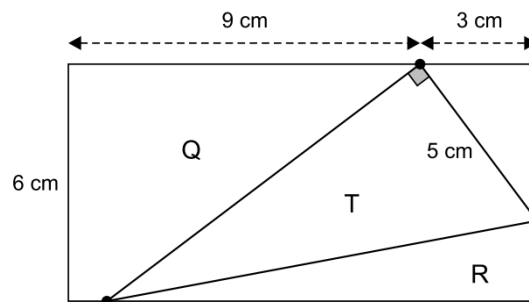
Esse é a medida do lado do quadrado. A questão pede a área desse quadrado.

- Área do quadrado (A):

$$A = y^2 \quad \rightarrow \quad A = 6^2 \quad \rightarrow \quad A = 36$$

Gabarito: LETRA C.

4. (VUNESP/SP-TRANS/2024) Um retângulo foi dividido em 4 regiões, sendo uma delas a região Q, de 30 cm^2 de área, e outra a região T, em forma de triângulo retângulo, cujos vértices estão sobre os lados do retângulo e com um dos catetos medindo 5 cm , conforme mostra a figura.



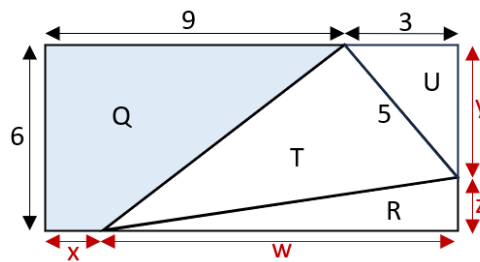
A área da região R é

- A) 11 cm^2 .
- B) 12 cm^2 .
- C) 13 cm^2 .
- D) 14 cm^2 .
- E) 15 cm^2 .

Comentários:

Inicialmente, vamos esquematizar o desenho acima com as dimensões de interesse.





Nosso objetivo preliminar será determinar **w, x, y e z**.

Para começar, observe que a questão informa que **a área de Q é igual a 30 cm²**. Sendo assim, como **Q é um trapézio**, podemos escrever:

$$\frac{(9 + x) \cdot 6}{2} = 30$$

$$9 + x = 10$$

$$x = 1$$

Já temos "x". Agora, para determinar "y", note que todo **o comprimento do retângulo mede 12**. Com isso:

$$x + w = 9 + 3$$

$$1 + w = 12$$

$$w = 11$$

Dessa vez, olhe para o **triângulo retângulo U**. Temos um cateto e a hipotenusa, podemos encontrar o outro cateto por meio do **Teorema de Pitágoras**.

$$y^2 + 3^2 = 5^2$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4$$

Por fim, como **a largura do retângulo mede 6**, podemos determinar z:

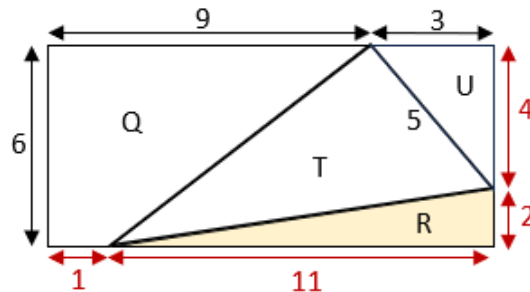
$$y + z = 6$$



$$4 + z = 6$$

$$z = 2$$

Temos todas as dimensões de interesse!



A questão pede a **área da região R (A)**. Como temos os dois catetos:

$$A = \frac{11 \cdot 2}{2} \rightarrow \boxed{A = 11}$$

Gabarito: LETRA A.

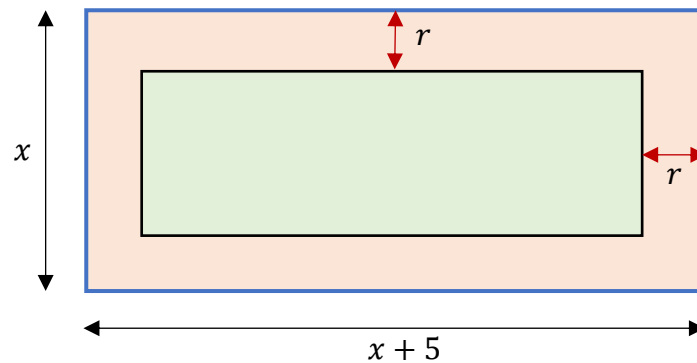
5. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos obrigatórios, o proprietário perde 75 m² da área do terreno para a construção da casa. Essa perda corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a

- A) 110
- B) 105
- C) 120
- D) 115
- E) 100

Comentários:

Vamos desenhar um pouco.





Agora, vamos analisar as informações do enunciado!

- O lado maior do retângulo tem 5 metros a mais do que o lado menor. Por esse motivo, **os lados do retângulo são " x " e " $x+5$ ".**

- A prefeitura exige um recuo. Chamamos esse recuo de " r ".

A área em "bege" é a área perdida do terreno, **valendo 75 m^2 .**

Com essas informações, já podemos concluir algumas coisas.

- Como essa perda equivale à décima parte da área do terreno, então **a área total é 750 m^2 .** Sendo assim,

$$x(x + 5) = 750 \quad \rightarrow \quad x^2 + 5x - 750 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-750) \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 + 3000 \quad \rightarrow \quad \Delta = 3025$$

- Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{3025}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm 55}{2}$$

$$x' = \frac{-5 + 55}{2} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{50}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x' = 25}$$

$$x'' = \frac{-5 - 55}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{-60}{2} \quad \rightarrow \quad x'' = -30$$



Como estamos trabalhando com medidas, **o valor negativo não faz sentido para nós**, apenas o positivo. Assim, $x = 25$. Como o outro lado do retângulo é **5 metros maior**, $x + 5 = 30$. A questão pede o valor do perímetro (contorno) desse terreno. Com isso:

$$\text{perímetro} = 30 + 30 + 25 + 25 \rightarrow \text{perímetro} = 60 + 50 \rightarrow \boxed{\text{perímetro} = 110 \text{ m}}$$

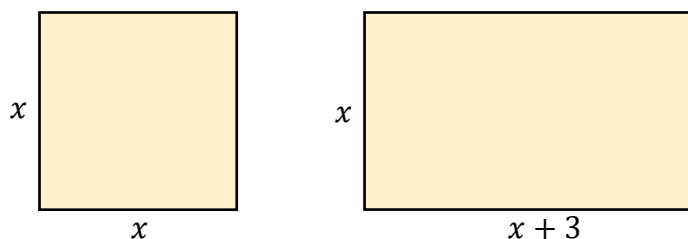
Gabarito: LETRA A.

6. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m^2 , a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a

- A) 38
- B) 42
- C) 40
- D) 44
- E) 36

Comentários:

Opa, vamos desenhar mais um pouco!



Temos dois terrenos, um quadrado e outro retângulo. As medidas de cada um estão na figura acima.

Como **a soma das áreas dos terrenos é igual a 324**, podemos escrever:

$$A_q + A_r = 324 \rightarrow x^2 + x(x + 3) = 324$$

Desenvolvendo um pouco,

$$2x^2 + 3x - 324 = 0$$

É uma equação de segundo grau. Vamos usar **Bhaskara** para resolvê-la.

- Cálculo do Discriminante



$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-324) \rightarrow \Delta = 9 + 2592 \rightarrow \Delta = 2601$$

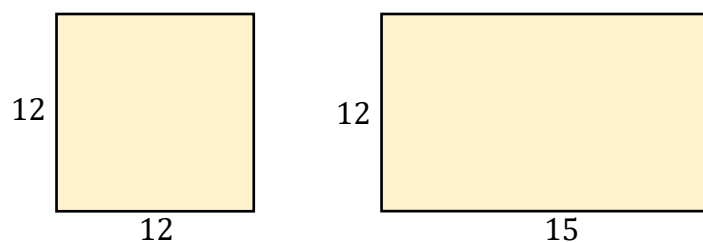
• Cálculo das Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 51}{4}$$

$$x' = \frac{-3 + 51}{4} \rightarrow x' = \frac{48}{4} \rightarrow \boxed{x' = 12}$$

$$x'' = \frac{-3 - 51}{4} \rightarrow x'' = \frac{-54}{4} \rightarrow x'' = -13,5$$

O resultado negativo não importa para nós! O motivo disso é o fato de que estamos trabalhando com medidas. Naturalmente, **elas são valores positivos**. Portanto, ficamos com a seguinte situação:



- Área do Quadrado:

$$A_q = 12^2 \rightarrow A_q = 144 \text{ m}^2$$

- Área do Retângulo:

$$A_r = 12 \cdot 15 \rightarrow A_r = 180 \text{ m}^2$$

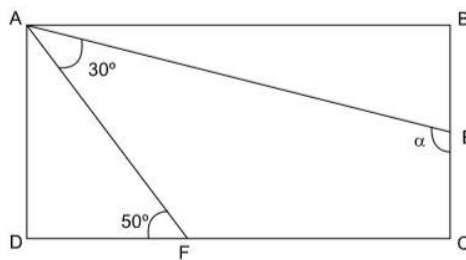
A questão pede a diferença entre essas duas áreas.

$$\text{Dif} = 180 - 144 \rightarrow \boxed{\text{Dif} = 36 \text{ m}^2}$$

Gabarito: LETRA E.

7. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.



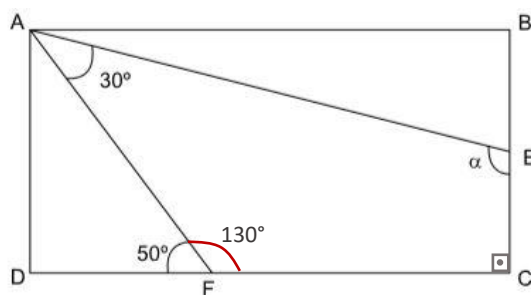


A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

- A) 100° .
- B) 110° .
- C) 120° .
- D) 130° .
- E) 140° .

Comentários:

Nessa questão, precisamos lembrar que **a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°** . Assim,

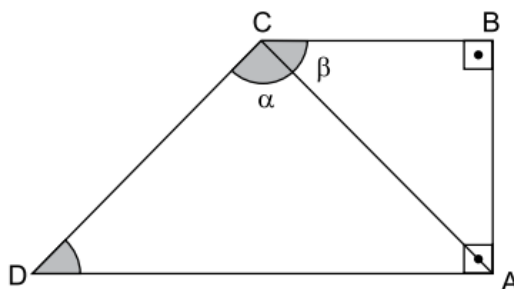


Note que **o suplementar de 50° é 130°** . Com isso, podemos somar os ângulos internos do quadrilátero AECF e igualar essa soma a 360° . Observe como fica:

$$30^\circ + 130^\circ + \alpha + 90^\circ = 360^\circ \rightarrow 250^\circ + \alpha = 360^\circ \rightarrow \alpha = 110^\circ$$

Gabarito: LETRA B.

8. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.

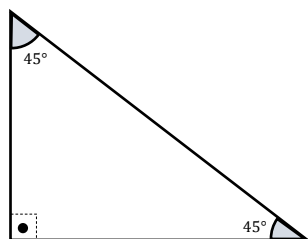


Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

- A) 125° .
- B) 115° .
- C) 110° .
- D) 135° .
- E) 130° .

Comentários:

Em um triângulo retângulo, teremos um ângulo reto (90°). Quando ele é isóscele, os outros ângulos serão iguais a 45° , conforme mostra a figura abaixo.



Qual o motivo disso? Vamos lá! Lembre-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° .

$$a + b + c = 180^\circ$$

- Quando o triângulo é retângulo, **um dos ângulos é igual a 90°** . Vamos dizer que seja "a". Logo,

$$90^\circ + b + c = 180^\circ \rightarrow b + c = 90^\circ$$

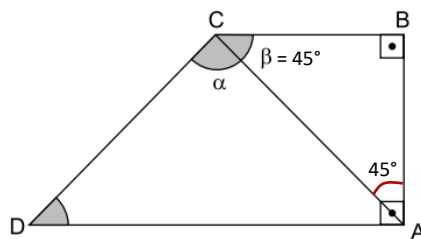
- Quando o triângulo é isóscele, **ele possui dois ângulos iguais**. Portanto, $b = c = x$.

$$x + x = 90^\circ \rightarrow 2x = 90^\circ \rightarrow x = 45^\circ$$

Assim, em um triângulo retângulo isósceles, sempre **teremos um ângulo de 90° e outros dois de 45°** . Agora, vamos para a questão em si.

De acordo com o enunciado, tínhamos **um trapézio que foi dividido em dois triângulos retângulos isósceles**. Sendo assim, vamos olhar atentamente para a figura dada no enunciado.





Observe que **ABC é um dos triângulos retângulos**. Se já temos o ângulo de 90° em B, então os demais serão de 45° , já que é um triângulo retângulo isósceles. Com isso, já podemos dizer que **$\beta = 45^\circ$** .

Falta determinarmos α . Como **DCA é outro triângulo retângulo isósceles**, então α mede 90° ou 45° . Para decidir qual dos dois é o valor de α , podemos ir por tentativa, para ganhar velocidade.

Se α fosse 45° , a soma de α e β seria 90° . **Não há alternativa com esse valor**. Consequentemente, α não pode ser 45° e **o único valor que sobra para ele é 90°** . Com isso,

$$\alpha + \beta = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Gabarito: LETRA D.

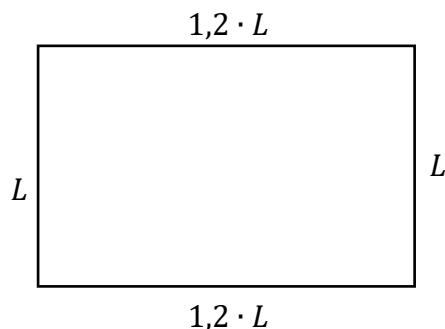
9. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Uma sala de aula, com perímetro de 22 metros, tem o comprimento equivalente a 1,2 vezes a sua largura. A área dessa sala de aula, em metros quadrados, é igual a

- A) 24.
- B) 26.
- C) 28.
- D) 30.
- E) 32.

Comentários:

Para evitar dúvidas, a questão poderia ter falado que **o formato da sala é retangular**. Mesmo ela não falando diretamente, quando a questão comenta sobre o comprimento e a largura, temos um bom indicativo que realmente estamos lidando com um retângulo. Tudo bem?! Vamos considerar que a largura seja L. Se **o comprimento é igual a 1,2 vezes a largura**, então podemos escrever que $C = 1,2L$. Em um desenho, ficaríamos com o seguinte:





- O enunciado disse que **o perímetro é 22 metros**. Lembre-se que **o perímetro é a soma dos lados**. Assim,

$$L + L + 1,2L + 1,2L = 22 \quad \rightarrow \quad 4,4L = 22 \quad \rightarrow \quad L = \frac{22}{4,4} \quad \rightarrow \quad L = 5$$

Pronto, encontramos que **a largura da sala é de 5 metros**. Já que o comprimento é 1,2 vezes a largura:

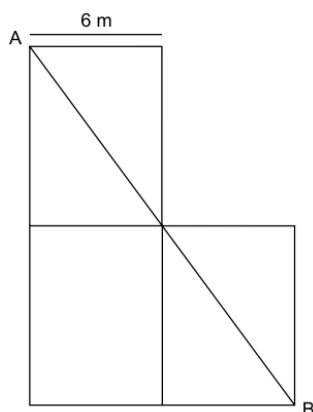
$$C = 1,2L \quad \rightarrow \quad C = 1,2 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad C = 6$$

Agora que temos o comprimento e a largura, é possível encontrar a área do retângulo. Lembre-se que **a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura**. Portanto,

$$A = C \cdot L \quad \rightarrow \quad A = 6 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad A = 30 \text{ m}^2$$

Gabarito: LETRA D.

10. (VUNESP/TJ-SP/2015) Em um jardim, um canteiro de flores, formado por três retângulos congruentes, foi dividido em cinco regiões pelo segmento AB, conforme mostra a figura.



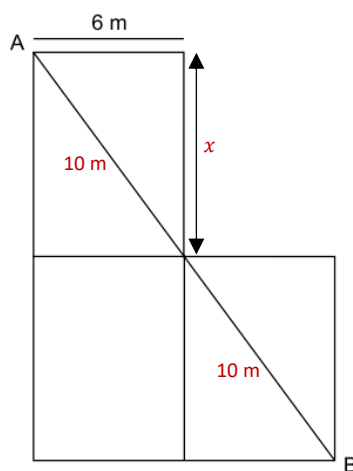
Se $\overline{AB}$ mede 20 m, então a área total desse canteiro é, em m^2 , igual a
A) 126.



- B) 135.
- C) 144.
- D) 162.
- E) 153.

Comentários:

Galera, queremos encontrar a área total do canteiro. Note que **o canteiro é formado por três retângulos iguais**. Assim, vamos encontrar a área de um e depois multiplicá-la por 3. Com isso, obteremos a resposta. Para começar, note que se **o segmento AB mede 20 metros**, então a diagonal de cada retângulo é igual a 10. Vamos esquematizar para você entender melhor.



Assim, **o comprimento "x" do retângulo é um dos catetos** do triângulo retângulo formado pela hipotenusa 10 m e por outro cateto de 6 metros. Sabendo disso, podemos **usar o teorema de Pitágoras**.

$$10^2 = 6^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 100 - 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 64 \quad \rightarrow \quad x = 8 \text{ m}$$

Vimos na teoria que **a área de um retângulo é igual ao produto do comprimento pela largura**. Logo,

$$A = 6 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad A = 48 \text{ m}^2$$

No entanto, o canteiro é formado por **três desses retângulos**. Portanto, sua área é o valor encontrado acima **multiplicado por 3**.

$$A_T = 48 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad A_T = 144 \text{ m}^2$$

Gabarito: LETRA C.

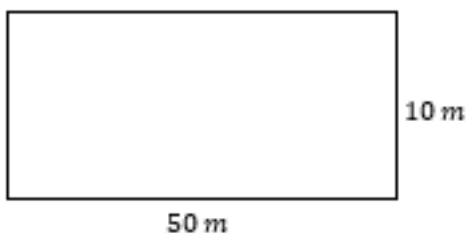
11. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Jaime possui uma chácara com terreno retangular de 10 m por 50 m. Jaime destinou $\frac{3}{5}$ da área de sua chácara para plantar árvores frutíferas. A área total destinada a árvores frutíferas na chácara de Jaime é



- A) 200 m².
- B) 250 m².
- C) 300 m².
- D) 350 m².
- E) 500 m².

Comentários:

A questão fala de um **terreno retangular de 10 m por 50 m**.



A **área do retângulo é o produto do comprimento pela largura**. Assim,

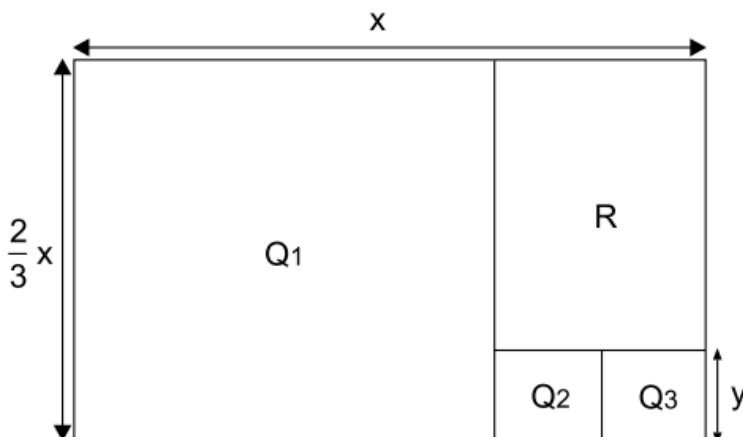
$$A = 10 \cdot 50 \rightarrow A = 500 \text{ m}^2$$

Como a área destinada para plantar árvores frutíferas foi **3/5 da área total**, então

$$A_{\text{frutífera}} = \frac{3}{5} \cdot 500 \rightarrow A_{\text{frutífera}} = 300 \text{ m}^2$$

Gabarito: LETRA C.

12. (VUNESP/TJ-SP/2017) Para segmentar informações, de modo a facilitar consultas, um painel de formato retangular foi dividido em 3 regiões quadradas, Q1, Q2 e Q3, e uma região retangular R, conforme mostra a figura, com dimensões indicadas em metros.

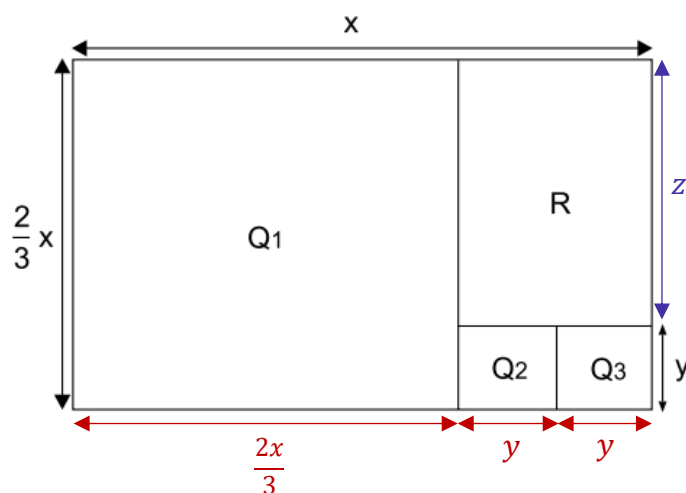


A área, em m^2 , da região retangular R é corretamente representada por:

- A) $\frac{1}{8}x^2$
- B) $\frac{1}{4}x^2$
- C) $\frac{1}{3}x^2$
- D) $\frac{1}{12}x^2$
- E) $\frac{1}{6}x^2$

Comentários:

Pessoal, lembre-se que **em um quadrado, todos os lados são iguais**. Podemos completar a figura acima com as seguintes informações destacadas em vermelho.



Queremos calcular a área de R. Note que **as dimensões do retângulo são "z" e "2y"**. Logo, sua área é:

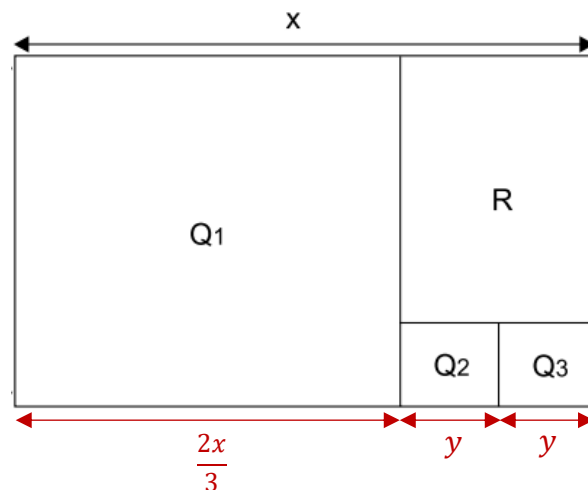
$$A_R = z \cdot 2y \rightarrow A_R = 2zy$$

As alternativas estão todas em função de "x".

Dessa forma, devemos **escrever "z" e "y" em função de x**, para depois substituir na fórmula acima. Para isso,

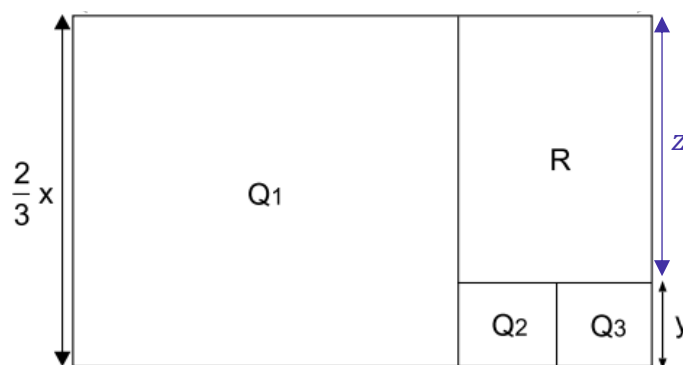
- O comprimento horizontal superior do retângulo maior é igual ao comprimento horizontal inferior.





$$x = \frac{2x}{3} + y + y \rightarrow x - \frac{2x}{3} = 2y \rightarrow \frac{x}{3} = 2y \rightarrow y = \frac{x}{6}$$

- Da mesma forma, olhando para as medidas da largura do retângulo:



$$\frac{2x}{3} = z + y \rightarrow z = \frac{2x}{3} - y$$

Vamos **substituir o "y"** com a expressão que achamos.

$$z = \frac{2x}{3} - \frac{x}{6} \rightarrow z = \frac{3x}{6} \rightarrow z = \frac{x}{2}$$

Pronto, temos **"y" e "z" em função de x.**

$$A_R = 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{6}\right) \rightarrow A_R = \frac{x^2}{6}$$

Gabarito: LETRA E.

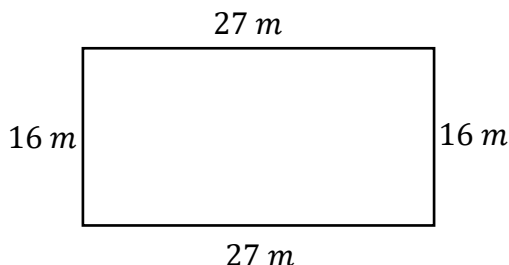


13. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) A quadra de uma escola possui 16 metros de largura por 27 metros de comprimento. Essa quadra será pintada, e a diretora pediu para que fosse colocada uma faixa de isolamento em toda sua volta. O total de faixa de isolamento necessário para essa quadra é de, pelo menos,

- A) 86 metros.
- B) 75 metros.
- C) 70 metros.
- D) 66 metros.
- E) 43 metros.

Comentários:

O total de faixa de isolamento necessário para a quadra **será igual a soma de todos os lados**. Basicamente, temos que calcular **o perímetro do retângulo** abaixo:

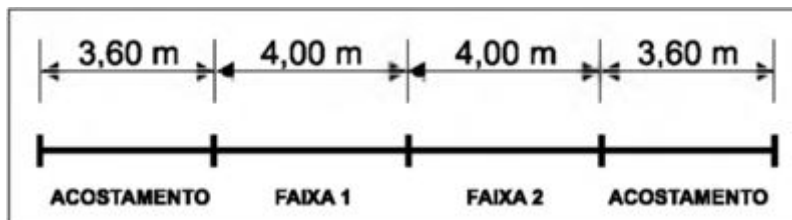


Assim,

$$\text{Perímetro} = 16 + 16 + 27 + 27 \rightarrow \text{Perímetro} = 86 \text{ m}$$

Gabarito: LETRA A.

14. (VUNESP/Câmara municipal de Serrana (SP)/2019) Uma empresa foi contratada para recapear 3,5 km de extensão de uma rodovia, incluindo o acostamento. O esquema a seguir apresenta a largura das faixas e do acostamento da via que será recapeada.



Considerando que será aplicada uma mesma espessura de massa asfáltica ao longo de toda a via e que o metro quadrado da superfície a ser recapeada foi orçado em R\$ 75,00, o preço total dessa obra será um valor

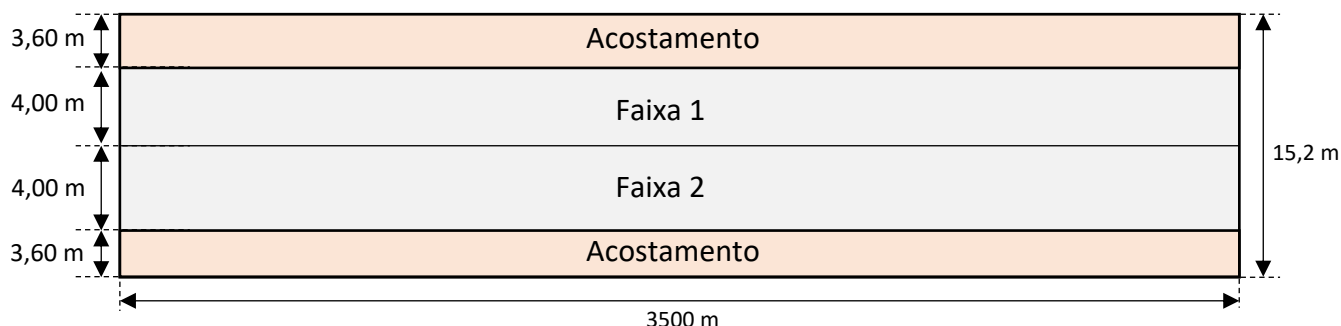
- A) inferior a R\$ 3.500.000,00.



- B) entre R\$ 3.500.000,00 e R\$ 3.800.000,00.
C) entre R\$ 3.800.000,00 e R\$ 4.100.000,00.
D) entre R\$ 4.100.000,00 e R\$ 4.400.000,00.
E) superior a R\$ 4.400.000,00.

Comentários:

Pessoal, temos que encontrar **quantos metros quadrados vão ser recapeados**. Para isso, veja a imagem:



Note que a área a ser recapeada é a **área de um retângulo** de comprimento 3500 metros (3,5 km) e largura igual a 15,2 m. Sendo assim,

$$A = 3.500 \cdot 15,2 \rightarrow A = 53.200 \text{ m}^2$$

Agora que temos a área, **devemos multiplicá-la pelo preço do metro quadrado**, para encontrarmos o preço total dessa obra. O enunciado disse que o preço do metro quadrado é R\$ 75,00. Portanto,

$$\text{Preço Total} = 53.200 \cdot 75 \rightarrow \text{Preço Total} = 3.990.000$$

Observe que **a obra vai custar R\$ 3.990.000,00**. Esse valor está entre R\$ 3.800.000,00 e R\$ 4.100.000,00, conforme consta na alternativa C.

Gabarito: LETRA C.

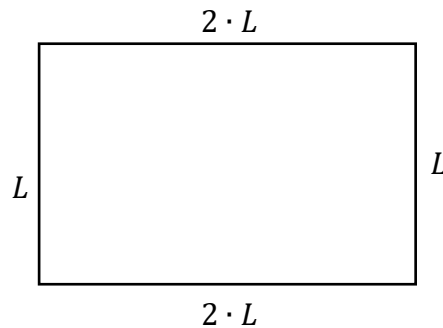
15. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de Olímpia (SP)/2019) A medida do comprimento de uma sala de formato retangular é igual ao dobro da medida da largura. Se o perímetro da sala for igual a 15 m, a área, em m², será de

- A) 14,50.
B) 14,00.
C) 13,50.
D) 13,00.
E) 12,50.



Comentários:

Vamos chamar a largura dessa sala de L . Como o comprimento é igual ao dobro da largura, temos que:



O perímetro de um retângulo é igual a soma de seus lados. Se o enunciado disse que **o valor do perímetro é 15 m**, então podemos equacionar o seguinte:

$$L + L + 2L + 2L = 15 \quad \rightarrow \quad 6L = 15 \quad \rightarrow \quad L = \frac{15}{6} \quad \rightarrow \quad L = 2,5 \text{ m}$$

Como **o comprimento é o dobro da largura**, encontramos que:

$$C = 2 \cdot 2,5 \quad \rightarrow \quad C = 5,0 \text{ m}$$

Como **a área de um retângulo é igual ao produto do comprimento pela largura**, então:

$$A = C \cdot L \quad \rightarrow \quad A = 5 \cdot 2,5 \quad \rightarrow \quad A = 12,5 \text{ m}^2$$

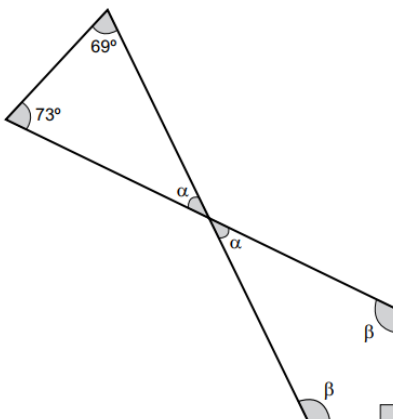
Gabarito: LETRA E.



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Polígonos

1. (VUNESP/PREF. MARÍLIA/2023) Um triângulo e um quadrilátero possuem um vértice em comum, conforme mostra a figura.



Observando que um dos ângulos do quadrilátero é reto, o valor de $\alpha + \beta$ é igual a

- A) 136° .
- B) 142° .
- C) 148° .
- D) 154° .
- E) 160° .

Comentários:

Observe que do lado esquerdo temos um triângulo. Em um triângulo, **a soma dos ângulos internos é igual a 180°** . Sabendo disso, podemos determinar o valor de α .

$$73^\circ + 69^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$142^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 38^\circ$$

Por sua vez, em um quadrilátero, temos que **a soma dos ângulos internos é igual a 360°** . Assim, escrevemos:

$$\alpha + \beta + \beta + 90^\circ = 360^\circ$$

$$38^\circ + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ$$



$$2\beta + 128^\circ = 360^\circ$$

$$2\beta = 232^\circ$$

$$\beta = 116^\circ$$

A questão pede a soma $\alpha + \beta$.

$$\alpha + \beta = 38^\circ + 116^\circ$$

$$\boxed{\alpha + \beta = 154^\circ}$$

Gabarito: LETRA D.

2. (VUNESP/PREF. SJC/2015) Em um polígono convexo de n lados, dois ângulos medem 155° , um mede 140° , um mede 170° e todos os demais medem 160° . Sabendo-se que a soma dos ângulos de um polígono convexo é dada pela fórmula $S = 180(n - 2)$, onde n representa o número de lados do polígono, conclui-se corretamente que para esse polígono n é igual a

- A) 15.
- B) 16.
- C) 17.
- D) 18.
- E) 19.

Comentários:

Temos um polígono convexo de n lados. Seja $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ os ângulos internos. De acordo com o enunciado:

$$\alpha_1 = 155^\circ$$

$$\alpha_2 = 155^\circ$$

$$\alpha_3 = 140^\circ$$

$$\alpha_4 = 170^\circ$$

$$\alpha_5 = 160^\circ$$

...

$$\alpha_{n-1} = 160^\circ$$

$$\alpha_n = 160^\circ$$

Quando somamos todos esses ângulos temos:

$$S = 155^\circ + 155^\circ + 140^\circ + 170^\circ + \underbrace{160^\circ + \dots + 160^\circ}_{\text{aparece } n-4 \text{ vezes}}$$



Ora, mais isso é **a soma dos ângulos internos**! Logo, igualaremos a expressão acima àquela nossa fórmula:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Com isso, vamos escrever:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 155^\circ + 155^\circ + 140^\circ + 170^\circ + (n - 4) \cdot 160^\circ$$

Nosso objetivo é encontrar **o número de lados "n"**.

$$180n - 360 = 620 + 160n - 640$$

$$20n = 340$$

$$n = \frac{340}{20}$$

$$\boxed{n = 17}$$

Gabarito: LETRA C.

3. (VUNESP/PREF. SJRP/2014) A soma dos ângulos internos de um dodecágono é igual a

- A) 360° .
- B) 480° .
- C) 720° .
- D) 1080° .
- E) 1800° .

Comentários:

Ora, **um dodecágono é um polígono de 12 lados**. Para encontrar a soma dos ângulos internos, usamos:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Com $n = 12$, obtemos:

$$S = (12 - 2) \cdot 180^\circ$$

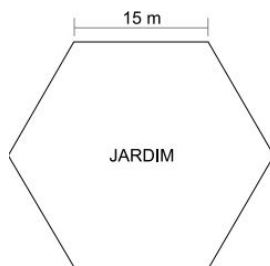
$$S = 10 \cdot 180^\circ$$

$$\boxed{S = 1800^\circ}$$

Gabarito: LETRA E.



4. (VUNESP/PREF. MOGI DAS CRUZES/2021) Um jardim especial deve ter uma cerca com dois fios de arame. A forma desse jardim é de um hexágono regular (todos os lados possuem a mesma medida), como na figura. Sabe-se que cada rolo de arame tem 20 metros. Portanto, o número mínimo de rolos necessários para o serviço é



- A) 6.
- B) 7.
- C) 8.
- D) 9.
- E) 10.

Comentários:

O primeiro passo é determinar **o perímetro (2p) do hexágono**. Como cada lado desse hexágono regular vale 15 metros e temos 6 lados, podemos escrever:

$$2p = 6 \cdot 15$$

$$2p = 90$$

Assim, concluímos que **o jardim tem 90 metros**. Se um rolo tem **20 metros**:

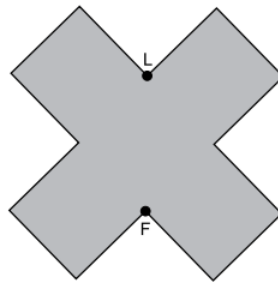
$$n = \frac{90}{20} \quad \rightarrow \quad n = 4,5$$

Ora, precisaremos de **4,5 rolos para dar uma volta nesse jardim**. No entanto, **cuidado aqui!** A cerca precisa ter dois fios de arame. Logo, na realidade, **precisaremos do dobro dessa quantidade**, ou seja, **9 rolos**.

Gabarito: LETRA D.

5. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) Um polígono tem todos os lados de mesma medida e quaisquer dois lados consecutivos se encontram formando ângulo reto, conforme mostra a figura.



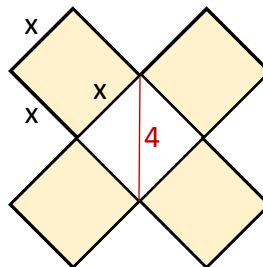


Sabendo-se que a distância entre os vértices F e L é igual a 4 cm, a área, em cm^2 , desse polígono é

- A) 20
- B) $20\sqrt{2}$
- C) 40
- D) $40\sqrt{2}$
- E) 80

Comentários:

Como os lados do polígono são todos iguais e se encontram formando um ângulo reto, então concluímos que esse polígono é formado por **5 pequenos quadrados**. Vamos ilustrar.



Observe que a informação passada corresponde exatamente a **diagonal** de um desses quadrados. Com isso:

$$x\sqrt{2} = 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad x = 2\sqrt{2}$$

Pronto! Encontramos o **lado** do quadrado. A área de cada um deles é dada por:

$$A_q = (2\sqrt{2})^2 \quad \rightarrow \quad A_q = 8 \text{ cm}^2$$

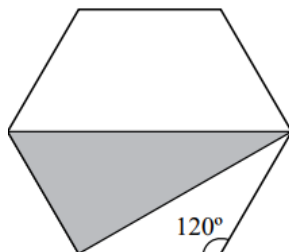
Ora, o polígono é formado por 5 quadrados desses. Logo, **sua área é 5 vezes a área do quadrado**.

$$A = 5A_q \quad \rightarrow \quad A = 5 \cdot 8 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 40 \text{ cm}^2}$$

Gabarito: LETRA C.



6. (VUNESP/CMSJC/2014) A figura representa um hexágono regular de lado medindo 6 cm.



A área do triângulo, sombreada na figura, com vértices coincidindo com os do hexágono, vale, em cm^2 ,

- A) $9\sqrt{3}$
- B) $9\sqrt{6}$
- C) $12\sqrt{3}$
- D) $18\sqrt{3}$
- E) $18\sqrt{6}$

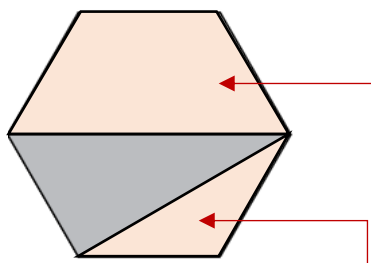
Comentários:

Uma ótima estratégia nessas questões que pedem a área de uma região sombreada é calcular a área do polígono inteiro e, depois, **descontar** as áreas das figuras que não interessam. Sendo assim, como temos um **hexágono regular de lado medindo 6 cm**, vamos encontrar sua área.

$$A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = \frac{3 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \rightarrow A = \frac{3 \cdot 36\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = 54\sqrt{3}$$

Pronto, essa é **área total do hexágono**. O primeiro "desconto" que podemos fazer é de **metade dessa área**.

Primeiro, vamos descontar essa área.
É metade da área do hexágono



Depois, descontaremos esse triângulo.

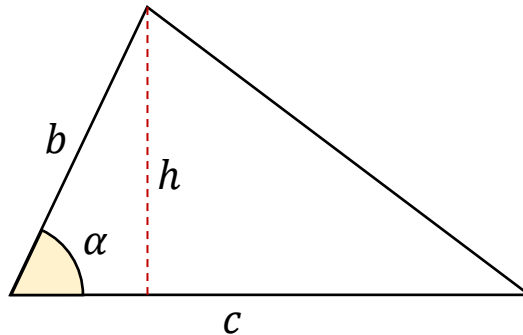
Assim:

$$A_r = 54\sqrt{3} - 27\sqrt{3}$$



$$A_r = 27\sqrt{3}$$

Agora, vamos calcular **a área do triângulo**. Observe a seguinte situação.



Nessas situações, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{ch}{2}$$

Observe que podemos escrever h em função do ângulo α

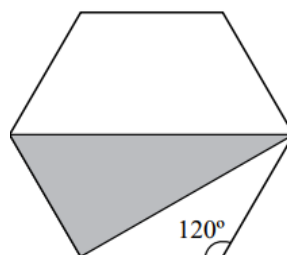
$$h = b \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo em A :

$$A = \frac{cb \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Qual o objetivo disso tudo?

Mostrar para vocês que quando **temos dois lados e o ângulo entre eles**, podemos calcular a área do triângulo diretamente pela fórmula acima. Agora, veja a situação da questão.



Observe que a situação é exatamente essa que vimos. Temos dois lados medindo **6 cm** cada e **o ângulo entre eles (120°)**. Com essas informações, podemos encontrar a área do triângulo:



$$A_t = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ}{2}$$

$$A_t = 18 \sin 120^\circ$$

$$A_t = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = 9\sqrt{3}$$

Opa, uma vez com a área do triângulo, podemos subtrair-la da área A_r para encontrar a área sombreada.

$$A = 27\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$$

$$\boxed{A = 18\sqrt{3}}$$

Gabarito: LETRA D.

7. (VUNESP/PB SAÚDE/2021) Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro de um octógono cujos lados têm todos a mesma medida. Se cada lado desse triângulo mede 8 cm, cada um dos lados do octógono mede

- A) 1,5 cm.
- B) 2 cm.
- C) 2,5 cm.
- D) 3 cm.
- E) 3,5 cm.

Comentários:

O triângulo equilátero possui 3 lados iguais. Se **um dos lados mede 8 cm**, então o perímetro ($2p$) desse triângulo pode ser encontrado:

$$(2p)_{tr} = 8 + 8 + 8 \quad \rightarrow \quad (2p)_{tr} = 24$$

Um octógono é um polígono com 8 lados. Se o perímetro desse octógono é igual ao perímetro do triângulo, podemos escrever:

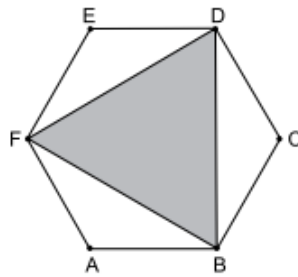
$$8L = 24 \quad \rightarrow \quad \boxed{L = 3 \text{ cm}}$$

Com isso, concluímos que **o lado do octógono é 3 cm.**

Gabarito: LETRA D.



8. (VUNESP/CM COTIA/2017) O triângulo BDF de área $12\sqrt{3}$ cm² tem 3 vértices em comum com o hexágono regular ABCDEF, conforme mostra a figura.

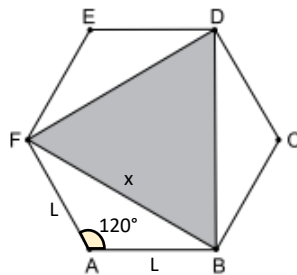


O perímetro desse hexágono, em cm, vale

- A) 24.
- B) 28.
- C) 32.
- D) 36.
- E) 40.

Comentários:

Vamos esquematizar.



Para encontrarmos o valor de "x", vamos usar **a lei dos cossenos**.

$$x^2 = L^2 + L^2 - 2 \cdot L \cdot L \cdot \cos(120^\circ)$$

$$x^2 = 2L^2 - 2L^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 2L^2 + L^2$$

$$x^2 = 3L^2$$

$$x = \sqrt{3}L \quad (1)$$



Como **BDF** é um triângulo equilátero:

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Temos a área A , podemos encontrar " x ".

$$12\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$x^2 = 48$$

$$x = 4\sqrt{3} \quad (2)$$

Usando (2) em (1), **encontramos "L"**:

$$\sqrt{3}L = 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{L = 4}$$

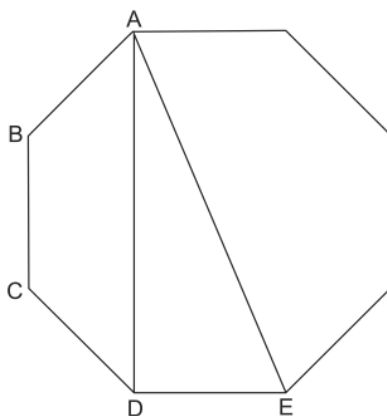
Ora, queremos o **perímetro do hexágono**:

$$(2p)_{hex} = 6 \cdot 4$$

$$\boxed{(2p)_{hex} = 24}$$

Gabarito: LETRA A.

9. (VUNESP/PREF. POA/2015) A figura ilustra um octógono regular de lado $\sqrt{2}$ cm.

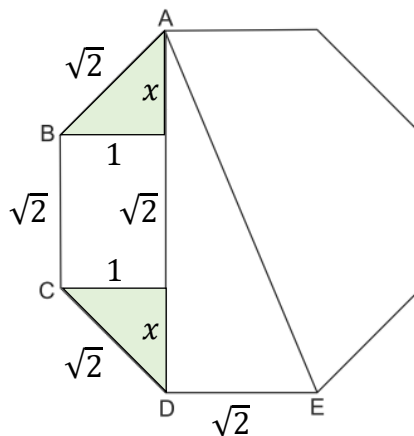


Sendo a altura do trapézio ABCD igual a 1 cm, a área do triângulo retângulo ADE vale, em cm^2 ,

- A) 5
- B) 4
- C) $\sqrt{5}$
- D) $\sqrt{2} + 1$
- E) 2

Comentários:

Vamos dar uma esquematizada nesse octógono.



Observe os triângulos retângulos destacados **em verde**. Podemos encontrar "x" com o **teorema de Pitágoras**.

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + x^2$$

$$x^2 = 2 - 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

Com isso, observe que o **cateto DA** do triângulo retângulo ADE é igual a:

$$\overline{DA} = \sqrt{2} + 1 + 1$$

$$\overline{DA} = \sqrt{2} + 2$$

Agora, temos os dois catetos e podemos encontrar a **área do triângulo ADE**.

$$A = \frac{AD \cdot DE}{2}$$



$$A = \frac{(\sqrt{2} + 2) \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$A = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{A = 1 + \sqrt{2}}$$

Gabarito: LETRA D.



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Introdução

1. (VUNESP/PREF. PRES. PRUDENTE/2022) A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é de $22^{\circ}44'$. A bissetriz do menor desses ângulos o divide em outros dois ângulos, cada um deles com medida de

- A) $14^{\circ}23'$
- B) $15^{\circ}17'$
- C) $15^{\circ}27'$
- D) $16^{\circ}49'$
- E) $16^{\circ}59'$

2. (VUNESP/PREF. F. VASCONCELOS/2018) As imagens a seguir apresentam algumas posições de dança. Destacado em branco está o ângulo correto das pernas para execução da posição.



Dentre as posições apresentadas, as duas em que a angulação das pernas é superior à de um ângulo reto são as posições

- A) 1 e 2.
- B) 1 e 3.
- C) 2 e 3.
- D) 2 e 4.
- E) 3 e 4.



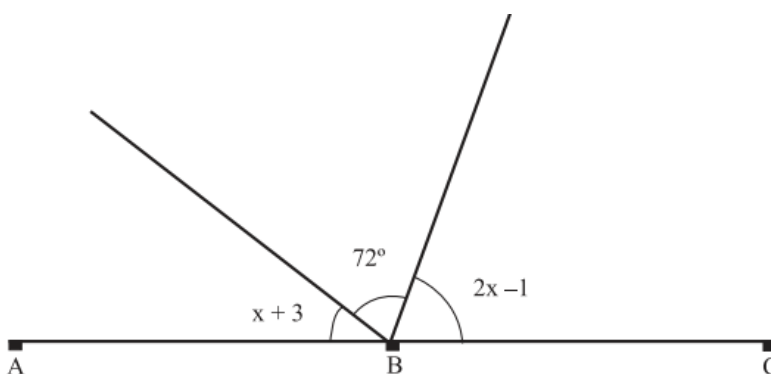
3. (VUNESP/SAP-SP/2013) Um arquiteto, em um de seus projetos, fez algumas medições e dentre elas mediu dois ângulos complementares. Um desses ângulos mediu 65° e o outro,

- A) 115° .
- B) 90° .
- C) 180° .
- D) 25° .
- E) 60° .

4. (VUNESP/FAPESP/2012) Sobre as medidas m e n , respectivamente dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$, sabe-se o seguinte: a soma delas é equivalente à medida de um ângulo raso e a diferença entre elas é equivalente à medida de um ângulo reto. Supondo-se o ângulo $\hat{M}$ com a maior medida, uma possível relação entre m e n é

- A) $m = 2n$.
- B) $m = 3n$.
- C) $m = 4n$.
- D) $m = 5n$.
- E) $m = 6n$.

5. (VUNESP/SPPREV/2009) Na figura, os pontos A, B e C são colineares e B é vértice comum dos três ângulos em destaque.



Sabendo-se que as medidas desses ângulos estão indicadas em graus, conclui-se que o valor de x é igual a

- A) 30° .
- B) 32° .
- C) $35^\circ 20'$.
- D) $35^\circ 33'$.
- E) 36° .



GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA D
4. LETRA B
5. LETRA C



QUESTÕES COMENTADAS - VUNESP

Circunferências

1. (VUNESP/PREF. JUNDIAÍ/2022) Miguel comprou uma lata de tinta spray com 200 mL, cujo rendimento total é de $3,0 \text{ m}^2$, e pretende usá-la para pintar a superfície circular da tampa de um poço, cujo raio mede 0,5 m. Assumindo a aproximação $\pi = 3$, depois de ter pintado a tampa do poço, a quantidade de tinta que ainda restará na lata de tinta spray corresponderá a

- A) 75 mL.
- B) 100 mL.
- C) 125 mL.
- D) 150 mL.
- E) 175 mL.

2. (VUNESP/PREF. SOROCABA/2022) Uma região plana foi delimitada por circunferência cujo comprimento era de, aproximadamente, 157 m. A alternativa que mais se aproxima da área dessa região demarcada é

- A) 1920 m^2 .
- B) 1930 m^2 .
- C) 1940 m^2 .
- D) 1950 m^2 .
- E) 1960 m^2 .

3. (VUNESP/PREF. RIO CLARO/2022) Uma praça tem formato de círculo, com 20 m de diâmetro. A razão entre os valores numéricos correspondentes ao perímetro, em m, e à área, em m^2 , dessa praça, é igual a

- A) 0,05.
- B) 0,10.
- C) 0,20.
- D) 5,0.
- E) 10,0.

4. (VUNESP/PM-SP/2019) Utilizando-se para π o valor aproximado de 3,14, o perímetro de uma região plana em forma de círculo é de aproximadamente 63 m. Dessa forma, das alternativas a seguir, a que apresenta o valor mais aproximado para a área dessa região, em metros quadrados, é

- A) 305.
- B) 315.
- C) 325.
- D) 335.
- E) 345.



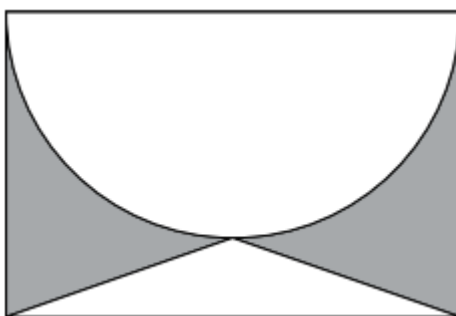
5. (VUNESP/PM-SP/2015) Ontem, três atletas realizaram seus treinamentos percorrendo distâncias diferentes sobre uma pista circular de 300 m de diâmetro. Sabe-se que Nivaldo percorreu 2,7 km a menos que Murilo e 1,8 km a mais que Ramiro, e que, juntos, eles deram um total de 37 voltas completas nessa pista. Usando a aproximação $\pi = 3$, é correto afirmar que a distância em quilômetros percorrida por Murilo no treinamento de ontem foi

- A) 15,6.
- B) 13,5.
- C) 12,6.
- D) 11,7.
- E) 10,8.

6. (VUNESP/CMBP/2013) O diâmetro de uma bola de boliche é de 16 cm. Supondo que uma dessas bolas, ao ser arremessada, role, sem deslizar, pela pista de 20 m de extensão, o número de voltas que ela completará, em torno de si mesma, ao final do percurso, é mais próximo de

- A) 30.
- B) 35.
- C) 40.
- D) 45.
- E) 50.

7. (VUNESP/COREN-SP/2013) O retângulo da figura tem lados de medidas 6 cm e 4 cm. A semicircunferência tem como diâmetro um lado de 6 cm do retângulo. O triângulo é isósceles e tem vértices nas extremidades de um dos lados do retângulo e sobre a circunferência, conforme a figura.



A área da região sombreada, em cm^2 , vale

- A) $21 - 4,5\pi$
- B) $6 + 1,6\pi$
- C) $22 - 5,5\pi$
- D) $6 + 0,5\pi$
- E) $24 - 6,5\pi$

GABARITO

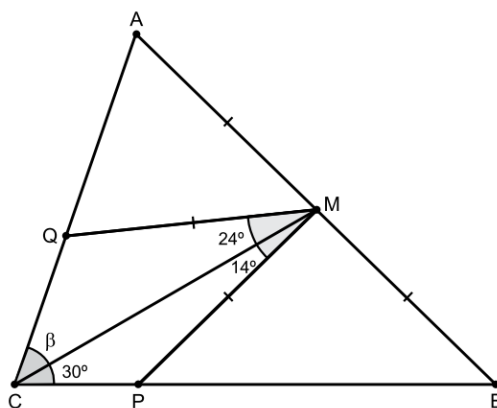
1. LETRA D
2. LETRA E
3. LETRA C
4. LETRA B
5. LETRA B
6. LETRA C
7. LETRA A



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Triângulos

1. (VUNESP/ISS-SANTO ANDRÉ/2024) Em um triângulo ABC, o ponto M divide o lado AB em duas partes de mesma medida, e os pontos P e Q estão sobre os lados desse triângulo, de modo que $MP = MQ = MA$, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo β é

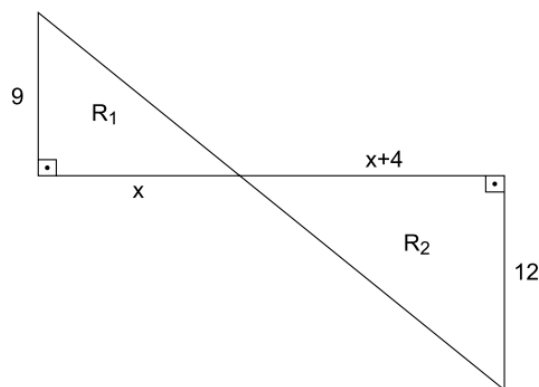
- A) 38° .
- B) 39° .
- C) 40° .
- D) 41° .
- E) 42° .

1. (VUNESP/PREF. TAUBATÉ/2022) Um mestre de obras precisa de um pedaço de madeira cortada em formato de triângulo retângulo, com o maior lado medindo 37 cm, e o menor lado medindo 12 cm. O perímetro desse pedaço de madeira triangular deve ser de

- A) 81 cm
- B) 82 cm
- C) 83 cm
- D) 84 cm
- E) 85 cm

2. (VUNESP/TJ-SP/2017) A figura seguinte, cujas dimensões estão indicadas em metros, mostra as regiões R_1 e R_2 , ambas com formato de triângulos retângulos, situadas em uma praça e destinadas a atividades de recreação infantil para faixas etárias distintas.

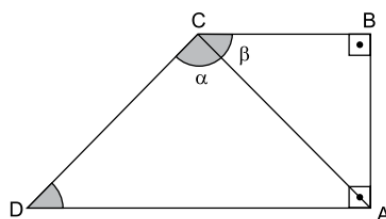




Se a área de R_1 é 54 m^2 , então o perímetro de R_2 é, em metros, igual a

- A) 40.
- B) 42.
- C) 54.
- D) 48.
- E) 36.

3. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.



Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

- A) 125° .
- B) 115° .
- C) 110° .
- D) 135° .
- E) 130° .

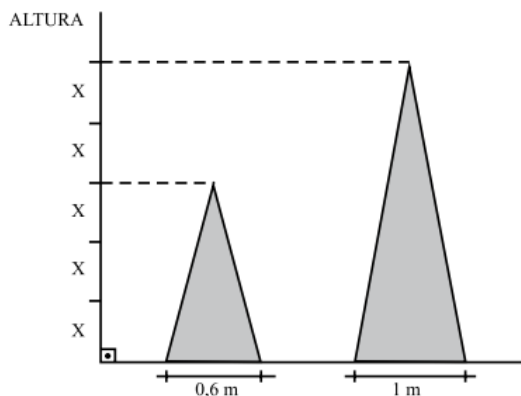
4. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) De um terreno no formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 25 metros e 15 metros, respectivamente. A medida do terceiro lado desse terreno é igual a

- A) 19,5 metros.
- B) 20,0 metros.
- C) 20,5 metros.
- D) 21,0 metros.



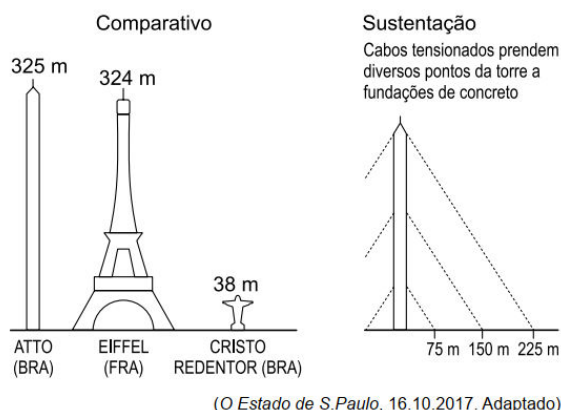
E) 21,5 metros.

5. (VUNESP/TJ-SP/2011) A figura compara as alturas, medidas em metros, de dois painéis decorativos triangulares, fixados em uma parede, que simulam árvores de Natal. Sabendo-se que a soma das medidas das alturas dos dois painéis é igual a 4 m, e que em cada painel foram instaladas 200 lampadzinhas coloridas por metro quadrado, pode-se concluir que o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura foi igual a



- A) 200.
- B) 250.
- C) 275.
- D) 300.

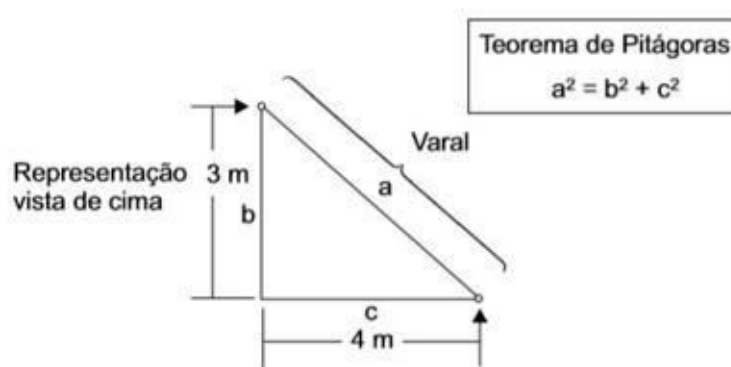
6. (VUNESP/TJ-SP/2018) Inaugurado em agosto de 2015, o Observatório da Torre Alta da Amazônia (Atto, em inglês) é um projeto binacional Brasil-Alemanha que busca entender o papel da Amazônia no clima do planeta e os efeitos das mudanças climáticas no funcionamento da floresta. Construída numa região de mata preservada, dentro da Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uamatã, a torre Atto tem 325 m de altura e é a maior estrutura de pesquisa desse tipo em florestas tropicais no mundo.



Considere a torre posicionada perpendicularmente ao solo e admita que o cabo tensionado fixado no solo a uma distância de 75 m da base da torre esteja preso à torre em um determinado ponto, cuja altura, em relação ao solo, seja igual a 100 m. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento desse cabo é igual a

- A) 110 m.
- B) 125 m.
- C) 135 m.
- D) 150 m.
- E) 130 m.

7. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Murilo vai colocar um varal em seu quintal. Ele já colocou os ganchos em duas paredes perpendiculares, conforme indicado pelas setas da imagem a seguir, de acordo com as distâncias marcadas.



Murilo utilizou o teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento de corda de varal que ele terá disponível para colocar suas roupas. Sabendo-se que Murilo colocará o varal bem esticado, se calcular corretamente, descobrirá que terá de varal, em metros, o total de

- A) 5,0.
- B) 5,5.
- C) 6,0.
- D) 6,5.
- E) 7,0.

8. (VUNESP/Prefeitura Municipal de Ibaté (SP)/2019) Mauro pretende fazer um cercado triangular em seu terreno de forma que este triângulo tenha a sua altura medindo dois terços da medida de sua base e que sua área seja de 75 m^2 . Então, a soma das medidas da base e da altura deste triângulo, expressas em metros, será igual a

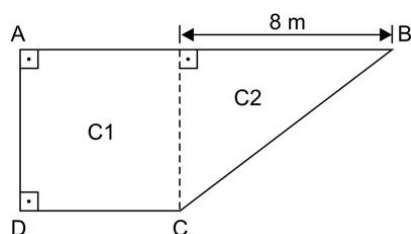
- A) 20
- B) 22
- C) 25
- D) 28
- E) 30



9. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) Para que um triângulo e um retângulo de mesma base tenham áreas equivalentes, a altura do triângulo deve ser, em relação à altura do retângulo,

- A) 3 vezes maior.
- B) 3 vezes menor.
- C) a metade.
- D) o dobro.
- E) igual.

10. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) Um jardim ABCD é composto por um canteiro quadrado, C1, e um canteiro com a forma de um triângulo retângulo, C2, conforme mostra a figura.



Se a área do canteiro C2 é 24 m^2 , então o perímetro do jardim ABCD é igual a

- A) 42 m.
- B) 40 m.
- C) 36 m.
- D) 30 m.
- E) 28 m.

11. (VUNESP/Serviço Municipal de Água e Esgotos de Piracicaba (SP)/2019) A respeito de um grande jardim com formato de triângulo retângulo, sabe-se que o maior e o menor lados medem 13 e 5 metros. A medida, em metros, do terceiro lado desse jardim é igual a

- A) 10,5.
- B) 11.
- C) 11,5.
- D) 12.
- E) 12,5.



GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA D
3. LETRA D
4. LETRA D
5. LETRA B
6. LETRA B
7. LETRA B

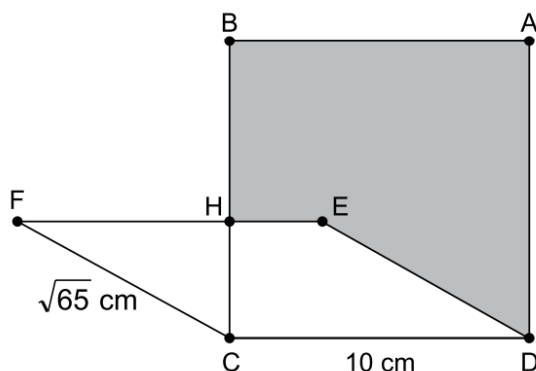
8. LETRA A
9. LETRA C
10. LETRA B
11. LETRA C
12. LETRA D



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Quadriláteros

1. (VUNESP/SBCPREV/2024) Um quadrado ABCD de lado 10 cm tem o lado CD em comum com o paralelogramo CDEF, de área 40 cm^2 . O lado EF do paralelogramo intersecta o lado BC do quadrado no ponto H, conforme mostra a figura a seguir.



Considerando o exposto, afirma-se com correção que a área do polígono ABHED é

- A) 62 cm^2 .
- B) 66 cm^2 .
- C) 70 cm^2 .
- D) 74 cm^2 .
- E) 78 cm^2 .

2. (VUNESP/CM-CAMPINAS/2024) Em um terreno retangular, com lados medindo 22 m e 31 m, será construído um pequeno galpão, também retangular, em que um lado tem 2 m a mais do que o outro, conforme representado na figura a seguir:

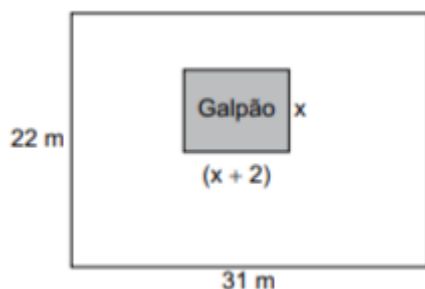


Figura fora de escala



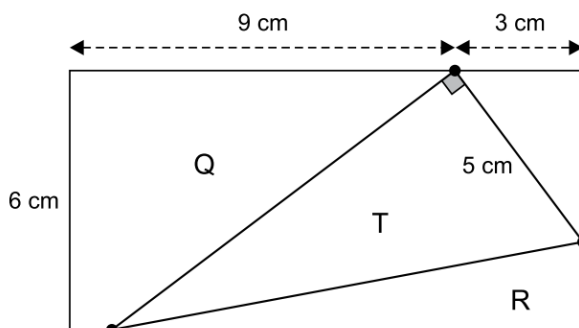
Sabendo-se que, após a construção do galpão, o terreno deverá ter 619 m^2 de área livre, ou seja, sem considerar a área ocupada pelo galpão, o perímetro do galpão deverá ser de

- A) 26 m.
- B) 30 m.
- C) 28 m.
- D) 32 m.
- E) 34 m.

3. (VUNESP/SP-TRANS/2024) Considere x a medida, em cm, do lado de um triângulo equilátero e y a medida, também em cm, do lado de um quadrado Q . A soma dos perímetros desse triângulo e desse quadrado é igual a 45 cm. Se o perímetro de um retângulo de lados medindo x e y é igual a 26 cm, a área do quadrado Q é

- A) 16 cm^2 .
- B) 25 cm^2 .
- C) 36 cm^2 .
- D) 49 cm^2 .
- E) 64 cm^2 .

4. (VUNESP/SP-TRANS/2024) Um retângulo foi dividido em 4 regiões, sendo uma delas a região Q , de 30 cm^2 de área, e outra a região T , em forma de triângulo retângulo, cujos vértices estão sobre os lados do retângulo e com um dos catetos medindo 5 cm, conforme mostra a figura.



A área da região R é

- A) 11 cm^2 .
- B) 12 cm^2 .
- C) 13 cm^2 .
- D) 14 cm^2 .
- E) 15 cm^2 .

5. (VUNESP/ALESP/2022) Um terreno retangular tem o lado maior com 5 metros a mais que o lado menor. A prefeitura exige que haja um recuo em cada lado para realizar construções. Realizando os recuos obrigatórios, o proprietário perde 75 m^2 da área do terreno para a construção da casa. Essa perda



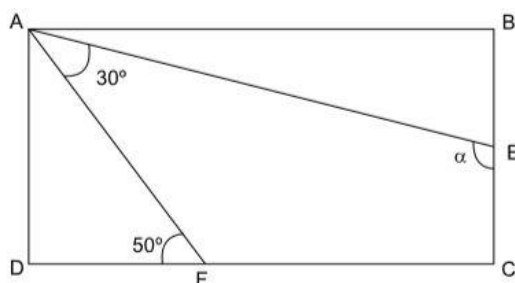
corresponde à décima parte da área total do terreno. Com essas informações, é correto afirmar que a medida do contorno desse terreno é, em metros, igual a

- A) 110
- B) 105
- C) 120
- D) 115
- E) 100

6. (VUNESP/ALESP/2022) Comprei um terreno quadrado e em seguida comprei outro, retangular, cuja largura é igual ao lado do terreno quadrado, e o comprimento tem 3 metros a mais que a largura. Sabendo que a área total dos dois terrenos é de 324 m^2 , a diferença entre as áreas desses dois terrenos é, em metros quadrados, igual a

- A) 38
- B) 42
- C) 40
- D) 44
- E) 36

7. (VUNESP/ Prefeitura Municipal de Piracicaba (SP)/2020) O retângulo ABCD foi dividido em 3 regiões, conforme mostra a figura.

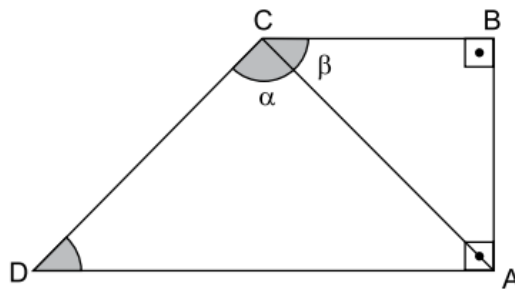


A medida do ângulo indicado por α no quadrilátero AECF é

- A) 100° .
- B) 110° .
- C) 120° .
- D) 130° .
- E) 140° .

8. (VUNESP/TJ-SP/2015) Na figura, o trapézio retângulo ABCD é dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos isósceles, de lados $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DC}$.





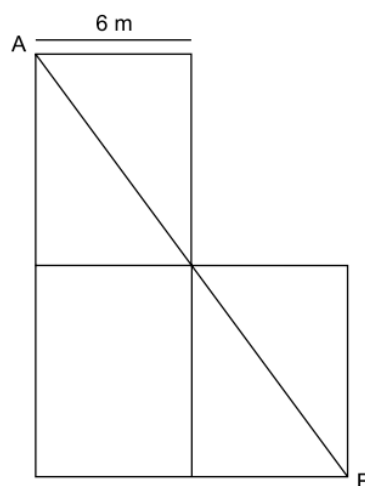
Desse modo, é correto afirmar que a soma das medidas dos ângulos α e β é igual a

- A) 125° .
- B) 115° .
- C) 110° .
- D) 135° .
- E) 130° .

9. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Uma sala de aula, com perímetro de 22 metros, tem o comprimento equivalendo a 1,2 vezes a sua largura. A área dessa sala de aula, em metros quadrados, é igual a

- A) 24.
- B) 26.
- C) 28.
- D) 30.
- E) 32.

10. (VUNESP/TJ-SP/2015) Em um jardim, um canteiro de flores, formado por três retângulos congruentes, foi dividido em cinco regiões pelo segmento AB, conforme mostra a figura.



Se $\overline{AB}$ mede 20 m, então a área total desse canteiro é, em m^2 , igual a

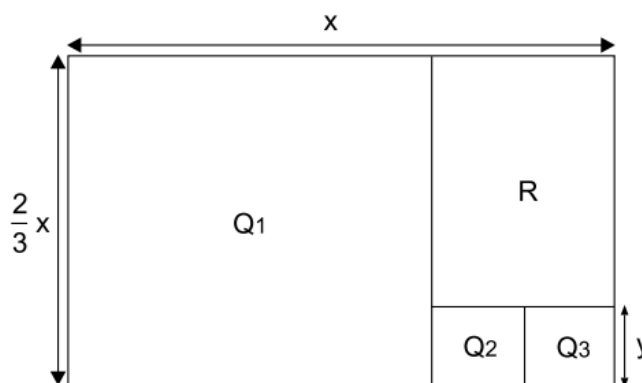


- A) 126.
- B) 135.
- C) 144.
- D) 162.
- E) 153.

11. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) Jaime possui uma chácara com terreno retangular de 10 m por 50 m. Jaime destinou $\frac{3}{5}$ da área de sua chácara para plantar árvores frutíferas. A área total destinada a árvores frutíferas na chácara de Jaime é

- A) 200 m^2 .
- B) 250 m^2 .
- C) 300 m^2 .
- D) 350 m^2 .
- E) 500 m^2 .

12. (VUNESP/TJ-SP/2017) Para segmentar informações, de modo a facilitar consultas, um painel de formato retangular foi dividido em 3 regiões quadradas, Q1, Q2 e Q3, e uma região retangular R, conforme mostra a figura, com dimensões indicadas em metros.



A área, em m^2 , da região retangular R é corretamente representada por:

- A) $\frac{1}{8}x^2$
- B) $\frac{1}{4}x^2$
- C) $\frac{1}{3}x^2$
- D) $\frac{1}{12}x^2$
- E) $\frac{1}{6}x^2$

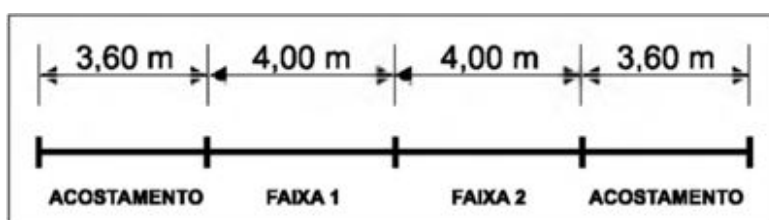
13. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de São Roque (SP)/2020) A quadra de uma escola possui 16 metros de largura por 27 metros de comprimento. Essa quadra será pintada, e a diretora pediu



para que fosse colocada uma faixa de isolamento em toda sua volta. O total de faixa de isolamento necessário para essa quadra é de, pelo menos,

- A) 86 metros.
- B) 75 metros.
- C) 70 metros.
- D) 66 metros.
- E) 43 metros.

14. (VUNESP/Câmara municipal de Serrana (SP)/2019) Uma empresa foi contratada para recapear 3,5 km de extensão de uma rodovia, incluindo o acostamento. O esquema a seguir apresenta a largura das faixas e do acostamento da via que será recapeada.



Considerando que será aplicada uma mesma espessura de massa asfáltica ao longo de toda a via e que o metro quadrado da superfície a ser recapeada foi orçado em R\$ 75,00, o preço total dessa obra será um valor

- A) inferior a R\$ 3.500.000,00.
- B) entre R\$ 3.500.000,00 e R\$ 3.800.000,00.
- C) entre R\$ 3.800.000,00 e R\$ 4.100.000,00.
- D) entre R\$ 4.100.000,00 e R\$ 4.400.000,00.
- E) superior a R\$ 4.400.000,00.

15. (VUNESP/Prefeitura Municipal da Estância Turística de Olímpia (SP)/2019) A medida do comprimento de uma sala de formato retangular é igual ao dobro da medida da largura. Se o perímetro da sala for igual a 15 m, a área, em m^2 , será de

- A) 14,50.
- B) 14,00.
- C) 13,50.
- D) 13,00.
- E) 12,50.



GABARITO

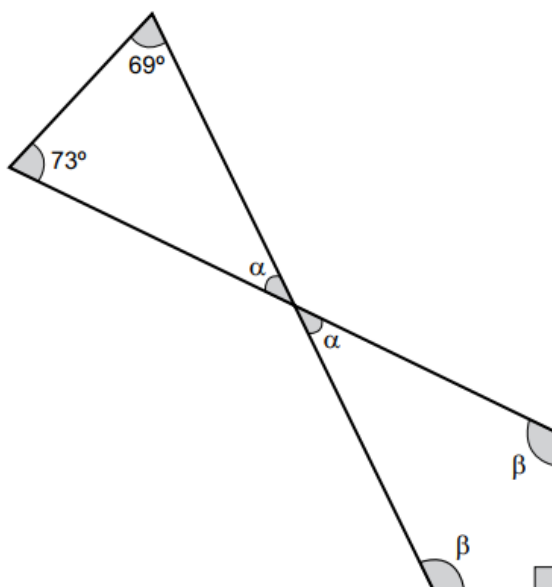
1. LETRA D
2. LETRA D
3. LETRA C
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA E
7. LETRA B
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA C
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA A
14. LETRA C
15. LETRA E



LISTA DE QUESTÕES - VUNESP

Polígonos

1. (VUNESP/PREF. MARÍLIA/2023) Um triângulo e um quadrilátero possuem um vértice em comum, conforme mostra a figura.



Observando que um dos ângulos do quadrilátero é reto, o valor de $\alpha + \beta$ é igual a

- A) 136° .
- B) 142° .
- C) 148° .
- D) 154° .
- E) 160° .

2. (VUNESP/PREF. SJC/2015) Em um polígono convexo de n lados, dois ângulos medem 155° , um mede 140° , um mede 170° e todos os demais medem 160° . Sabendo-se que a soma dos ângulos de um polígono convexo é dada pela fórmula $S = 180(n - 2)$, onde n representa o número de lados do polígono, conclui-se corretamente que para esse polígono n é igual a

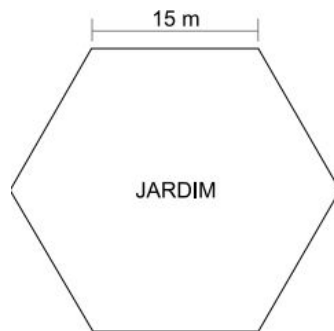
- A) 15.
- B) 16.
- C) 17.
- D) 18.
- E) 19.

3. (VUNESP/PREF. SJRP/2014) A soma dos ângulos internos de um dodecágono é igual a



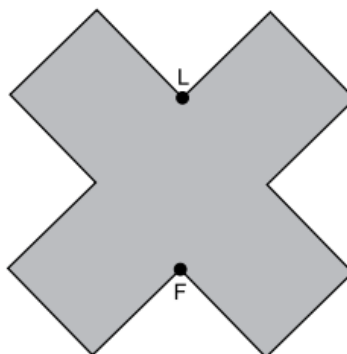
- A) 360° .
- B) 480° .
- C) 720° .
- D) 1080° .
- E) 1800° .

4. (VUNESP/PREF. MOGI DAS CRUZES/2021) Um jardim especial deve ter uma cerca com dois fios de arame. A forma desse jardim é de um hexágono regular (todos os lados possuem a mesma medida), como na figura. Sabe-se que cada rolo de arame tem 20 metros. Portanto, o número mínimo de rolos necessários para o serviço é



- A) 6.
- B) 7.
- C) 8.
- D) 9.
- E) 10.

5. (VUNESP/PREF. VALINHOS/2019) Um polígono tem todos os lados de mesma medida e quaisquer dois lados consecutivos se encontram formando ângulo reto, conforme mostra a figura.



Sabendo-se que a distância entre os vértices F e L é igual a 4 cm, a área, em cm^2 , desse polígono é

- A) 20
- B) $20\sqrt{2}$

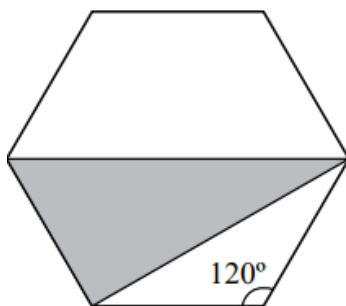


- C) 40
- D) $40\sqrt{2}$
- E) 80

6. (VUNESP/ESFCEX/2021) A área de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de diâmetro d , pode ser dada por:

- A) $\frac{nd^2}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{\pi}\right)$
- B) $\frac{nd^2}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{\pi}\right)$
- C) $\frac{nd^2}{8} \operatorname{sen}(360^\circ \cdot \pi)$
- D) $\frac{nd^2}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{\pi}\right)$
- E) $\frac{nd^2}{2} \operatorname{sen}(360^\circ \cdot \pi)$

7. (VUNESP/CMSJC/2014) A figura representa um hexágono regular de lado medindo 6 cm.



A área do triângulo, sombreada na figura, com vértices coincidindo com os do hexágono, vale, em cm^2 ,

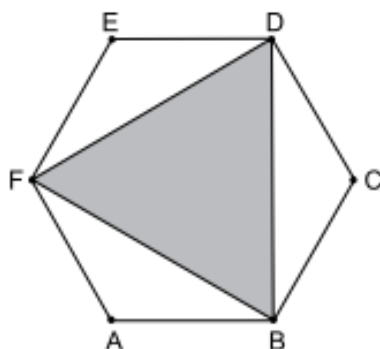
- A) $9\sqrt{3}$
- B) $9\sqrt{6}$
- C) $12\sqrt{3}$
- D) $18\sqrt{3}$
- E) $18\sqrt{6}$

8. (VUNESP/PB SAÚDE/2021) Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro de um octógono cujos lados têm todos a mesma medida. Se cada lado desse triângulo mede 8 cm, cada um dos lados do octógono mede

- A) 1,5 cm.
- B) 2 cm.
- C) 2,5 cm.
- D) 3 cm.
- E) 3,5 cm.



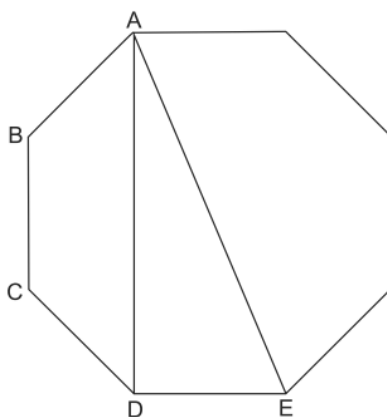
9. (VUNESP/CM COTIA/2017) O triângulo BDF de área $12\sqrt{3}$ cm² tem 3 vértices em comum com o hexágono regular ABCDEF, conforme mostra a figura.



O perímetro desse hexágono, em cm, vale

- A) 24.
- B) 28.
- C) 32.
- D) 36.
- E) 40.

10. (VUNESP/PREF. POA/2015) A figura ilustra um octógono regular de lado $\sqrt{2}$ cm.



Sendo a altura do trapézio ABCD igual a 1 cm, a área do triângulo retângulo ADE vale, em cm²,

- A) 5
- B) 4
- C) $\sqrt{5}$
- D) $\sqrt{2} + 1$
- E) 2



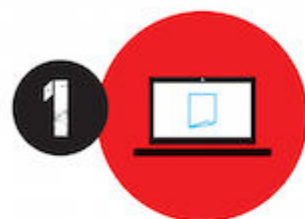
GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA D
5. LETRA C
6. LETRA D
7. LETRA D
8. LETRA D
9. LETRA A
10. LETRA D



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.